JAN 9 1924

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 3 ::
Oktober 1923

:: Heft 5 ::
Seite 329 bis 400

I N H A L T:

HAUPTAUFSÄTZE:

HOPF, Die Messung der hydraulischen Rauhigkeit / FROMM, Strömungswiderstand in rauhen Rohren / TIMOSCHENKO, Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Mittellinie / TIETZE, Über das Schicksal gemischter Populationen nach den Mendelschen Vererbungsgesetzen

KURZE AUSZÜGE

Hydraulik

KLEINE MITTEILUNGEN

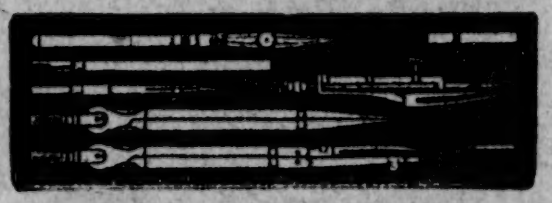
BUCHBESPRECHUNGEN

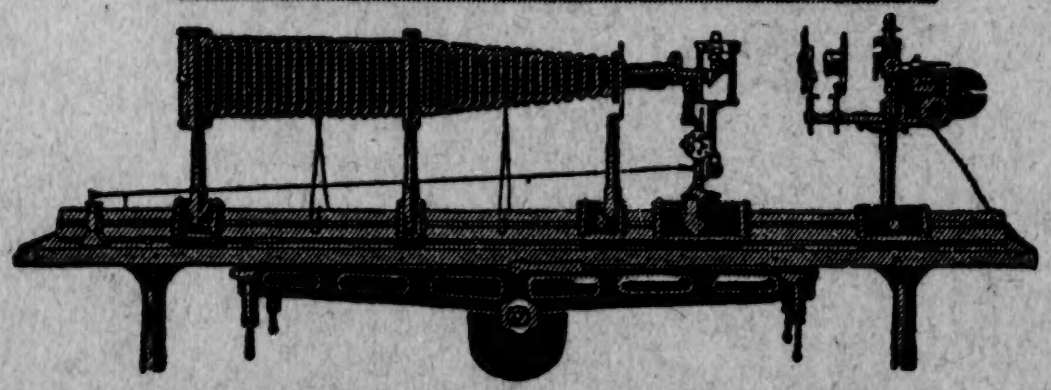
NACHRICHTEN

VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

Ott
-Pantographen
—Planimeter
——Flügel
——Pegel
sind Qualitätsmarken
A. OTT, KEMPTEN (Bayern)

Elektrische Meßinstrumente
für technische und wissenschaftliche Zwecke
Land- u. Seekabelwerke A.-G. · Köln-Nippes
Abt. Apparatebau


Präzisions-REISSZEUGE
Präzisions-UHREN
Nickelstahl-PENDEL
CLEMENS RIEFLER
Fabrik mathem. Instrumente
NESSELWANG u. MÜNCHEN

LEITZ

MIKROSKOPE
für mikro-metallographische Untersuchungen und Aufnahmen im auffallenden Licht mit patentierter erschütterungsfreier Lagerung
Werkstatt-Mikroskope für Messzwecke
Schleif- und Poliervorrichtungen für Metallschliffe
Projektionsapparate
für Unterrichts- und Vortragszwecke
ERNST LEITZ ★ WETZLAR
OPTISCHE WERKE

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Bd. 3 **Ende Oktober 1923** **Heft 5**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. L. Hopf: Die Messung der hydraulischen Rauhigkeit	329
K. Fromm: Strömungswiderstand in rauhen Rohren	339
S. Timoschenko: Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Mittellinie	358
H. Tietze: Ueber das Schicksal gemischter Populationen nach den Mendelschen Vererbungsgesetzen	362
Kurze Auszüge. Hydraulik	393
Kleine Mitteilungen. v. Kármán: Gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl — Gumbel: Ueber die bei Funktionen von Variabeln auftretende Korrelation	395
Buchbesprechungen. Ludwig: Lehrbuch der darstellenden Geometrie	398
Nachrichten	399

HAUPTAUFSÄTZE

Die Messung der hydraulischen Rauhigkeit.

Von **LUDWIG HOPF** in Aachen.

Unsere Kenntnisse über die turbulente Flüssigkeitsströmung sind noch sehr unvollkommen. Einerseits haben wir nur ganz wenige Anhaltspunkte über die Struktur der turbulenten Strömung, über Pulsationen, mittlere Geschwindigkeitsverteilung usw. Andererseits ist aber auch über den Druckabfall in turbulenten Strömungen noch sehr wenig Klarheit vorhanden trotz der sehr zahlreichen und teilweise sehr exakten Versuche, die auf diesem Gebiete angestellt wurden, und trotz der energischen und gewiß nicht unwichtigen Bemühungen um praktisch brauchbare empirische Formeln. Die bisherigen Versuchsergebnisse reichen im allgemeinen weder zur praktischen Verwertung in der hydraulischen Technik, noch als Unterlage für eine Theorie der turbulenten Strömungen aus. Der Grund für diese unbefriedigende Lage scheint mir in erster Linie darin zu liegen, daß die Gesichtspunkte der physikalischen Forschung noch sehr wenig in die Gedankengänge der Praktiker, die fast allein große Versuchsreihen anstellen konnten, eingedrungen sind. Versuche sind Wege durch unerforschtes Land. Eine Karte dieses Landes auf Grund verschiedener Durchquerungen kann man aber nur aufnehmen, wenn man die gegenseitige Lage der einzelnen Wege, ihre Richtungen und Durchschneidungen überblickt. Dies leistet für die hydraulischen Versuche bis zu einem gewissen Grade die Theorie der mechanischen Aehnlichkeit und nur durch deren folgerechte Berücksichtigung können die verschiedenen Versuchsreihen, die nur zum geringsten Teil ganz systematisch, meist mit eng begrenzten Zielen, mitunter auch mit unberechtigtem Anspruch auf Allgemeingeltung angestellt wurden, in ein System gebracht werden.

1. Das Gesetz der Aehnlichkeit. Die Aehnlichkeits- oder Modellregel läßt sich am einfachsten dahin aussprechen, daß eine Beziehung zwischen gemessenen Größen dann und nur dann eine allgemein gültige Form erhält und in ihrer Tragweite richtig zu beurteilen ist, wenn man sie nicht als Beziehung zwischen den unmittelbar gemessenen Größen, sondern als Beziehung zwischen Zahlen (unbenannten, dimensionslosen Größen) darstellt. Will man diesen Grundsatz auf das vorliegende Problem anwenden, so muß man zunächst an Stelle des Druck- oder Gefällsverlustes eine unbenannte Größe als die gesuchte Größe (abhängige Variable) annehmen. Man gelangt zu einer solchen am ein-

fachsten, indem man den Druckhöhenverlust mit der Geschwindigkeitshöhe $v^2 : 2g$ vergleicht. Man nimmt ferner die Vorstellung zu Hilfe, daß der Druckhöhenverlust durch eine Oberflächenreibung zustande kommt, die am ganzen benetzten Umfang wirkt. Da andererseits die Schwerkraft am ganzen Querschnitt eines Flüssigkeitsstromes angreift, gelangt man durch diese Vorstellung zu dem Begriff des Profilradius r, gleich dem Quotienten Querschnitt : Umfang, der für jede beliebige Querschnittsform eine eindeutige Größe von der Dimension einer Länge darstellt. So wird seit langem für den Druckverlust H auf der Strecke l folgende Formel angesetzt:

$$\frac{H}{l} = \psi \frac{v^2}{2gr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Hierbei ist ψ ein reiner Zahlenfaktor; der Zahlwert, der in einem jeden Fall die Größe ψ angibt, ist unabhängig von den gewählten zufälligen Maßeinheiten und hat darum allgemeineren Sinn als der Zahlwert H in irgend einem Maßsystem. Die Gl. (1) ist dabei nichts als eine Definition von ψ und sagt nichts darüber aus, von welchen Größen ψ abhängen kann. Es ist also keineswegs H proportional der Geschwindigkeitshöhe oder umgekehrt proportional dem Profilradius gesetzt; das wäre nur der Fall, wenn man ψ als eine Konstante einführen würde.

Die Zahl ψ kann wieder nur von unbenannten Zahlen abhängen. Es hat keinen allgemeinen Sinn, nach der Abhängigkeit der Größe ψ von v oder r zu fragen. Man kann nur nach den dimensionslosen Größen fragen, welche auf ψ wirken, und welche ihrerseits v oder r enthalten können. In dieser Gestalt ist die Frage zuerst von Osborne Reynolds behandelt und dann von Blasius[1]) für glatte Rohre klargestellt worden. Blasius hat auch schon versucht, seine Untersuchung auf das bis dahin unübersichtliche Versuchsmaterial über rauhe Rohre auszudehnen. Eine Sichtung dieses Materials hat besonders v. Mises[2]) unternommen, der zum erstenmal eine dem Aehnlichkeitsgesetz genügende Widerstandsformel für glatte und rauhe Rohre angegeben hat.

2. Die dimensionslosen Größen, von denen ψ abhängen kann, sind dreierlei:

1. Verhältnisse zwischen Längen und Winkel, welche die geometrische Form des Strömungsquerschnittes charakterisieren. Diesem Einfluß sucht man schon durch Einführung des Profilradius-Begriffes in Formel (1) Rechnung zu tragen. Der Einfluß der Querschnittsform auf ψ würde vollständig herausfallen, wenn jeder Teil des Umfanges in gleicher Weise zu den Widerstandskräften beitragen würde. Dies ist nun im allgemeinen freilich nicht der Fall. Das Versuchsmaterial zeigt jedoch, daß der Einfluß bei den gebräuchlichsten Profilen nicht sehr groß ist, und neuere Versuche von Schiller[3]) weisen nach, daß auch bei weniger einfachen Formen der Einfluß nicht entscheidend wirkt.

2. Die Reynoldssche Kennzahl, die den Einfluß der Flüssigkeitsreibung zum Ausdruck bringt. Bezeichnet ν die kinematische Zähigkeit (Reibungskoeffizient durch Dichte der Flüssigkeit), so ist die Reynoldssche Zahl (oder reduzierte Geschwindigkeit)

$$\Re = \frac{vr}{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Alle Versuchsergebnisse für glatte Rohre von geometrisch ähnlicher (z. B. Kreis-) Form lassen sich, wie Blasius gezeigt hat, in eine einzige Kurve zusammenfassen, die ψ als Funktion von $\Re$ darstellt. Die von verschiedenen Beobachtern angestellten Versuche bestätigen diese Folgerung des mechanischen Aehnlichkeitsgesetzes und geben in guter Uebereinstimmung einen Zusammenhang der sich durch die Potenzfunktion

$$\psi = 0{,}0559\, R^{-0{,}25} \text{ (Blasius, Kreisrohre)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

oder

$$\psi = 0{,}0705\, R^{-0{,}27} \text{ (Fromm, rechteckige Rohre)} \quad \ldots\ldots \quad (3a)$$

darstellt. Die genaue Gültigkeit dieser Potenzformel weit über den Bereich hinaus, für den sie ursprünglich aufgestellt wurde, legt die Vermutung nahe, daß diese Form mehr als nur eine empirische Interpolationsformel bedeutet.

---

[1]) H. Blasius, Ztschr. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 639 u. Forschungsarbeiten, Heft 131 (1913).
[2]) v. Mises, Elemente der techn. Hydromechanik, Leipzig 1914, S. 53 bis 65.
[3]) L. Schiller, diese Zeitschrift Bd. 3 (1923), S. 2 ff., Abschnitt III.

3. Zahlen, welche die sog. Wandrauhigkeit charakterisieren. Ueber diese ist noch wenig bekannt. Man findet, daß Rohre mit nicht glatter Wandung gegenüber glatten eine Steigerung des Druckgefälles aufweisen. Bei gleicher geometrischer Form und gleicher Reynoldsscher Zahl, aber verschiedener Wandbeschaffenheit oder verschiedenem Profilradius findet man verschiedene ψ-Werte. Die mechanische Aehnlichkeit zweier Strömungen wird also noch nicht durch die Gleichheit der Reynoldsschen Zahl gewährleistet. Es kommt hier noch eine Wirkung der Wandbeschaffenheit ins Spiel, die sich in dem Einfluß einer »Rauhigkeitszahl« $\mathfrak{R}$ auf die Zahl ψ ausdrücken muß. Dabei ist aber nicht selbstverständlich — und, wie sich zeigen wird, auch nicht richtig —, daß es nur eine einzige solche Größe $\mathfrak{R}$ ist, durch die man die Wirkung der Wandrauhigkeit immer charakterisieren kann. Wir wollen also grundsätzlich mehrere solche Zahlen zulassen und allgemein zunächst nur sagen, daß bei gleicher geometrischer Form ψ eine Funktion von $\mathfrak{R}$ und den Rauhigkeitszahlen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \ldots$ ist. Es liegt am nächsten, so wie es Blasius und v. Mises getan haben, die Wirkung der Wandrauhigkeit mit der Größe der Wanderhebungen in Zusammenhang zu bringen und also die Rauhigkeitskonstante k einer bestimmten Wand als eine Größe von der Dimension einer Länge anzusehen. Dann erhält man eine Rauhigkeitszahl von der Form:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{k}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Dabei ist aber nicht etwa angenommen, daß die Größe k unmittelbar die mittlere Größe der Wanderhebungen mißt. k kann vor allem noch von der Anzahl der Erhebungen, von der Entfernung der einzelnen Erhebungen voneinander im Verhältnis zu ihrer Größe abhängig sein. Dieses Verhältnis könnte aber andererseits auch unmittelbar, also unabhängig von Absolutwerten der Erhebung, die Strömungsvorgänge beeinflussen. Wir kämen dann zu einer Rauhigkeitszahl $\mathfrak{R}_2$ unabhängig von r.

Schließlich könnten die Wanderschütterungen einen Einfluß haben und es könnte dadurch etwa eine Zahl $\mathfrak{R}_3$ in die Formeln kommen, welche auch von der Geschwindigkeit abhängig wäre.

3. Versuchsprogramm. Die Aehnlichkeitsgesetze, welche die Vorgänge in rauhen Rohren beherrschen, sind nicht nur theoretisch interessant, weil sie Anhaltspunkte dafür geben können, wie die der hydrodynamischen Theorie fremde Größe der Wandrauhigkeit aufzufassen ist, sondern auch technisch von großer Wichtigkeit, weil sie es ermöglichen, die an Versuchen oder technischen Einzelfällen gewonnenen Erfahrungen auf andere Verhältnisse zu übertragen, eine Aufgabe, welche in der Praxis täglich auftritt. Insbesondere muß der Bereich, auf welchen Erfahrungen übertragen werden dürfen, dann klar zutage liegen, wenn die vorliegenden Verhältnisse von denen der Versuche weit abweichen, und vor allem ist die Uebertragung von einem Modellversuch auf die Wirklichkeit nur aus den Aehnlichkeitsgesetzen heraus klar zu stellen. Die Möglichkeit, Modellversuche anzustellen, hat in der Praxis des Schiffbaues und des Baues von Luftfahrzeugen große Erleichterungen und Fortschritte gebracht. Die Frage, ob auch im Wasserbau Modellversuche nützlich sein können, ist daher wohl des Studiums wert.

Der inzwischen leider verstorbene Projektleiter am Ausbau der Mittleren Isar, Herr Dr. Th. Rümelin, welcher der Uebertragung wissenschaftlicher Gesichtspunkte auf die Praxis besonderes Verständnis entgegenbrachte, veranlaßte mich, ein Versuchsprogramm zur Klärung dieser Frage zu entwerfen und mit dessen Durchführung zu beginnen. Die Versuche wurden erst durch die Mittlere Isar G. m. b. H., dann durch ein wissenschaftliches Kuratorium, das Dr. Rümelin für diese und ähnliche Zwecke ins Leben gerufen hatte, unterstützt. Um zu erkennen, welche Zahl $\mathfrak{R}$ die Strömung in rauhen Röhren entscheidend beeinflußt, mußte man die Versuchsanordnung so bauen, daß sie bei gleicher Wandbeschaffenheit und gleicher Reynoldsscher Zahl verschiedene Verhältnisse herzustellen erlaubte. Die Möglichkeit, bei exakt gleicher Wand den Profilradius willkürlich zu ändern, ergab sich am leichtesten bei einem rechteckigen Rohr von einer gegenüber der Breite geringen Höhe. Die Breitseiten dieses Rechteckes bildeten 2 Platten des zu untersuchenden Materials, die Schmalseiten zwei exakt bearbeitete Stäbe, welche durch Schrauben an den Platten befestigt und daher leicht gegen Stäbe von anderer Dicke auswechselbar waren. Durch das liebenswürdige Entgegenkommen von Herrn Geheimrat Sommerfeld konnte diese Anordnung im Institut für theoretische Physik an der Universität München gebaut werden. Ihre Beschreibung kann an dieser Stelle übergangen werden, da ihre endgültige Form in der folgenden Arbeit von Herrn Dr. Fromm be-

schrieben wird. Die ersten Versuche wurden im hydraulischen Institut der Technischen Hochschule in München von Herrn Dr. Krönert und mir angestellt.

4. Vorversuche. Um eine einfach definierte und bedeutende Rauhigkeit zu erhalten, spannte ich über die beiden Platten ein Drahtnetz von 0,28 mm Drahtstärke und 1,34 mm Maschengröße. Gemessen wurde der Druckabfall in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl bis zu $\Re = 16\,000$ bei Stabdicken von 1,0 bis 2,5 cm. Es zeigte sich eine starke Abhängigkeit der ψ-Werte von der Schichtdicke und somit vom Profilradius, die bei Benutzung der einfach glatten Zinkplatten nicht vorhanden war, und eine starke Steigerung des Druckabfalls gegenüber den glatten Platten. Um nun zu untersuchen, wie weit diese Abhängigkeit wirklich nur der Aenderung der Schichtdicke zuzuschreiben sei, oder ob auch die Geschwindigkeit bei gleicher Reynoldsscher Zahl von Einfluß sein könnte, ob also die Zahl $\Re_1$ oder eine andere $\Re_3$ maßgebend sei, mußten die Reynoldssche Zahl und der Profilradius unverändert gehalten und nur die Geschwindigkeit variiert werden. Zu diesem Zweck wurde die kinematische Zähigkeit des Wassers durch Temperaturerhöhung mittels Einblasen von Dampf in die Wasserleitung erniedrigt. Die Temperatur des Wassers konnte bei kleinen Mengen bis zu 70°, bei großen bis zu 40° gesteigert werden. So gelang es, bei gleicher Reynoldsscher Zahl und gleichem Profilradius die Geschwindigkeit auf die Hälfte zu erniedrigen.

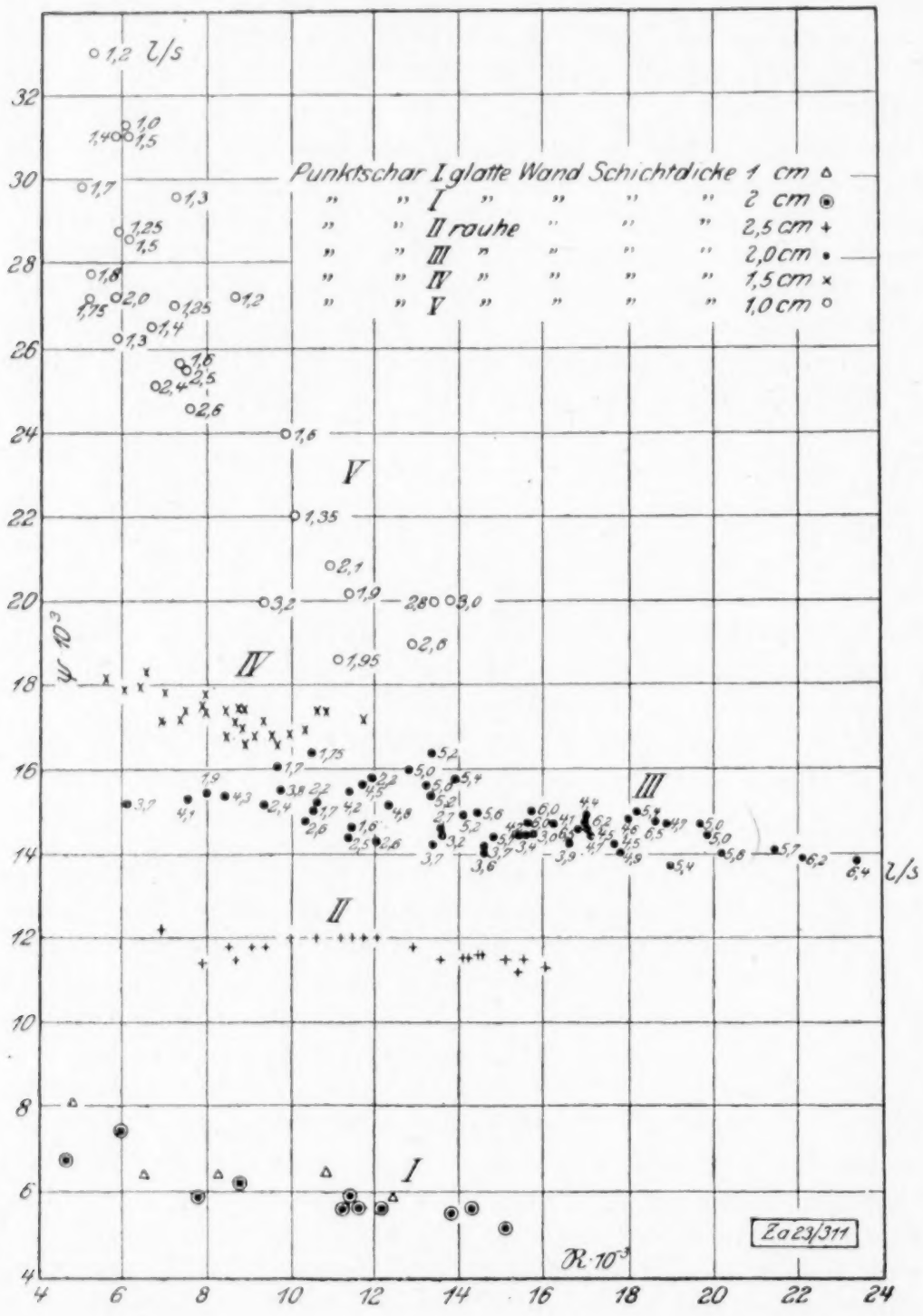


Abb. 1

Die Versuchsergebnisse sind in Abb. 1 eingetragen; die beiden Versuchsreihen mit 1,0 und 2,0 cm Schichtdicke sind mit warmem und kaltem Wasser durchgeführt; die an den einzelnen Meßpunkten vermerkten Zahlen geben die Durchflußmenge in l/sek an. Die Streuung ist besonders bei den Messungen mit warmem Wasser bedeutend und wohl hauptsächlich auf die durch den einströmenden Dampf erzeugten Unregelmäßigkeiten zurückzuführen. Aber man erkennt, daß der Einfluß verschiedener Geschwindigkeit bei gleichem Profilradius und gleicher Reynoldsscher Zahl jedenfalls kleiner als die unsystematische Streuung ist, während Aenderung des Profilradius bedeutende Wirkungen hervorruft. (Ueber den starken Abfall der ψ-Werte bei der Meßreihe V vergl. die Messungen von Fromm.) Somit ist festgestellt, daß die Strömung bei einer derartigen Wandrauhigkeit von einem durch die Rauhigkeitszahl $\Re_1 = \frac{k}{r}$ bestimmten Aehnlichkeitsgesetz beherrscht wird.

Weitergehende Schlüsse über die Form der Abhängigkeit des ψ von $\Re_1$ möchte ich aber nicht ziehen; denn die Fortführung der Experimente zeigte in diesen Vorver-

suchen Mängel, die einer exakten Auswertung hinderlich sind. Die Messung der Durchflußmenge mit Hilfe eines Poncelet-Gefäßes von recht kleinen Dimensionen war nicht sehr genau. Vor allem aber war die Befestigung des Drahtnetzes auf den Zinkplatten nicht gleichmäßig genug. Die Versuche mit gleicher Schichtdicke und mit verschiedener Geschwindigkeit sind dadurch kaum gestört. Dagegen konnte das Netz, das nur durch die Schrauben mit den Eisenstäben an den Platten festgespannt war, beim Auswechseln der Eisenstäbe doch Verschiebungen erfahren, welche — wie spätere Versuche zeigten — auf die Größe ψ, in welcher Fehler viel deutlicher zum Ausdruck kommen wie in der Druckhöhe selbst, einen nennenswerten Einfluß haben konnten.

5. Die Versuche von Fromm. Die wichtigste Aufgabe lag nun in der Verfeinerung der Versuche und der Feststellung der Funktion

$$\psi = \psi\,(\Re, \Re_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

in einem weiteren Bereich und für mehrere Wandbeschaffenheiten. Hat man bei einer bestimmten Wandbeschaffenheit durch Anwendung verschiedener Profilradien diese Funktion bestimmt und mißt nun mit einer anderen Wandbeschaffenheit bei irgend einem Profilradius den Druckabfall, so kennt man ψ und $\Re$ für den betreffenden Fall. Zwei Werte von ψ und $\Re$ gehören aber nach Gl. (5) nur zu einem bestimmten Wert von $\Re_1$, welchen man also aus der Messung des Druckabfalls berechnen kann. Wenn auch der Profilradius bekannt ist, so folgt ferner aus $\Re_1$ die Rauhigkeitslänge k nach Gl. (4). So gelangt man also zu einer bestimmten Meßvorschrift für die hydraulische Rauhigkeit und kann diese auch im Modellversuch bestimmen, wenn man nur die Funktion (5) ein- für allemal bestimmt hat.

Die Aufgabe, dieses Programm durchzuführen, unternahm Herr Dr. Fromm, nachdem Herr Prof. v. Kármán den Aufbau einer verbesserten Versuchsanordnung im Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen ermöglicht und in tatkräftiger Weise gefördert hat[1]). Die Hauptergebnisse waren die folgenden:

1. Für eine Reihe von metallischen Wänden (Drahtnetz, sägeartig bearbeitetes Zinkblech, zwei Arten Waffelblech) findet sich ein von $\Re$ unabhängiger ψ-Wert; nur in einem mehr oder weniger großen Uebergangsgebiet der Reynoldsschen Zahlen, in welchem noch eine laminare Strömung, wenigstens am Einlauf, sich ausbilden kann, findet sich ein Ansteigen oder Abfallen der ψ-Werte, das wahrscheinlich zum größten Teil auf einen Anlaufstreckeneffekt zurückgeführt werden dürfte. Die Abhängigkeit vom Profilradius bei bestimmter Wandbeschaffenheit zeigt, daß nur eine Zahl $\Re_1 = \frac{k}{r}$ maßgebend ist. Das gesuchte Gesetz für ψ lautete im Bereich der Reynoldsschen Zahl von der Größenordnung 10 bis 30000

$$\psi \sim \Re_1^{\,0,314} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

in guter Uebereinstimmung mit einer an obige Formel (3) bezw. (3a) anknüpfenden Aehnlichkeitsbetrachtung von v. Kármán[2]) und Prandtl. Für die 4 Materialien, mit denen Fromm gearbeitet hat, ist somit die Länge k mit befriedigender Genauigkeit bestimmt.

2. Bei Abwalzung des einen der Frommschen Waffelbleche zeigte sich ein ganz anderes Verhalten. Einesteils wurde im ganzen Meßbereich kein konstanter von $\Re$ unabhängiger ψ-Wert erreicht; andererseits verschwand die Abhängigkeit vom Profilradius. Bei gleicher Wandbeschaffenheit und gleicher Reynoldsscher Zahl fand sich derselbe Wert von ψ, aber ein erheblich größerer Wert als bei den glatten Rohren mit derselben Reynoldsschen Zahl. Der Wert hing stark vom Grade der Abwalzung ab. Das Aehnlichkeitsgesetz der Rauhigkeit wird also in diesem Falle von einer Zahl $\Re_2$ beherrscht, in welcher der Profilradius nicht vorkommt, welche also nicht von der Größe der Wanderhebungen, sondern nur etwa von dem Verhältnis derselben zu ihrer gegenseitigen Entfernung abhängig sein kann.

6. Die beiden Arten von „Rauhigkeit". Es liegt zunächst nahe, anzunehmen, daß auch die Meßergebnisse an den abgewalzten Waffelblechen sich ohne allzu großen Zwang einem Aehnlichkeitsgesetz $\Re_1$ einfügen würden, wenn man nur zu größeren Reynoldsschen Zahlen übergehen könnte; daß die Unabhängigkeit vom Profilradius nur daher rühre, daß die (ψ-$\Re$)-Kurven für verschiedene $\Re_1$ eng zusammenrücken und daß k

[1]) K. Fromm, in dem folgenden Aufsatz dieses Heftes.

[2]) Th. v. Kármán, Ueber laminare und turbulente Reibung, diese Zeitschrift Bd. 1 (1921) S. 233 Abs. 8

vom Grade der Abwalzung sehr empfindlich abhänge, daß also durch die Abwalzung des Frommschen Waffelbleches vom Zustand C zu Zustand D eine weit größere Wirkung auf $\mathfrak{R}_1$ erzielt werde, als durch die Aenderung der Schichtdicke von 1 auf 3 cm. Die Durchsicht des anderweitig vorliegenden Versuchsmaterials überzeugt mich aber davon, daß diese Deutung nicht richtig ist, und daß man zwei verschiedene Arten von Rauhigkeit annehmen muß, deren Gesetze in den Kurven der Abb. 2 und 3 deutlich werden. Die Einordnung der teilweise sehr guten Versuche früherer Beobachter in eine einzige Kurvenschar — wie sie in allen empirischen Formeln vorausgesetzt wird — erweist sich als ganz unmöglich. Die Kurven schneiden sich und gehen durcheinander in viel höherem Maße, als es den Versuchsfehlern entsprechen dürfte. Dagegen ordnen sich die Versuchsergebnisse ganz zwanglos in zwei Scharen, welche von Aehnlichkeitsgesetzen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ beherrscht werden:

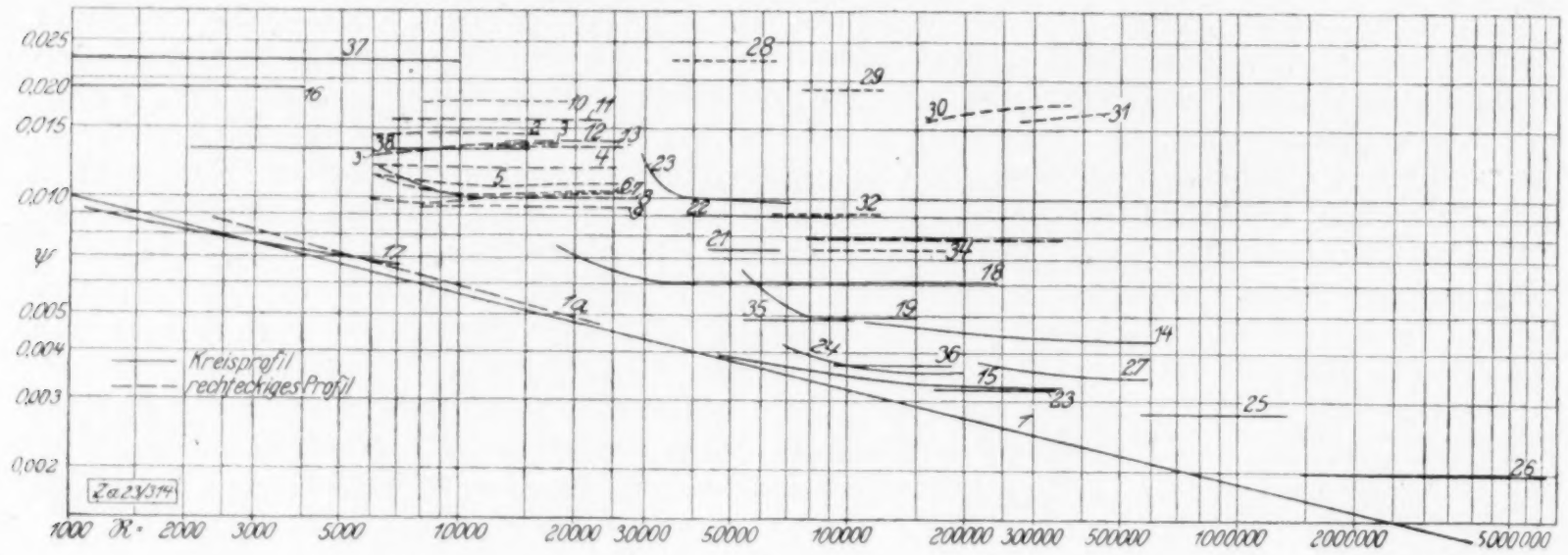


Abb. 2

1 Blasius nach Saph-Schoder u. a., Gl. (3). — 1a Fromm, Gl. (3a). — 2 bis 9 Fromm; Drahtnetz, rechteckiger Querschnitt; $r = 4{,}25$ bis 15,7 mm. — 10 bis 13 Fromm; Waffelblech, rechteckiger Querschnitt; $r = 4{,}2$ bis 14,6 mm. — 14 Marx, Wing, Hopkins, Trans. of amer. civil erg. 44 (1900); Holzröhre $r = 460$ mm, nach zweijährigem Gebrauch (s. Abb 5b) Temperaturangaben ungenau. — 15 Fitzgerald nach Biel, Forsch. d. V. d. I. 44 (1907); $r = 305$ mm. — 16 bis 19 Darcy, Recherches exp. Paris 1857 (16 $r = 8{,}98$ mm; 17 $r = 9{,}10$ mm; 18 $r = 7{,}42$ mm; 19 $r = 125$ mm; bei 19 fehlt Temperaturangabe; die Punkte für $\mathfrak{R} < 8 \cdot 10^4$ streuen sehr stark). — 21 bis 28 Zement; entnommen aus F. Scobey, U. S. Dep. of agriculture Bull. 852 (1920), Temperaturangabe fehlt (21 Scobey, Pomona [Calif.], $r = 108$ bezw. 81 mm; 22 Scobey, Temescal Water Co., Corona [Calif.], $r = 195$ mm; 23 Bazin, kurzer Versuchskanal, Dijon, besonders glatt, $r = 211$ mm; 24 Scobey, Victoria aqueduct, Canada, besonders glatt, aber viel Krümmungen, besonders günstige Versuchsbedingungen, $r = 272$ mm; 25 Moore, Wallkill-Tunnel, Catskill aqueduct, N.-Y., $r = 1130$ mm; 26 Johnston, Ontario Power Co., $r = 1400$ mm; 27 Budau, Zementwerke Perlmoos [Oesterreich], $r = 562$ mm). — 28 bis 31 Bazin, Mém. prés. à l'ac. des sciences 19 (1865); Rauhigkeit, erzeugt durch Bretter von 1,0 cm Dicke und 2,7 cm Breite, welche mit Lücken von 5,0 cm in den rechteckigen Holzkanal (Abb. 3, Nr. 17) genagelt waren. — 32 bis 34 Bazin, wie 28 bis 31; nur waren hier die Lücken nur 1,0 cm breit, Widerstand wesentlich kleiner als bei den vorigen Messungen. — 35 bis 36 Petit, Eisenblech, entnommen aus Ombeck a. a. O., $r = 111$ und $r = 150$ mm. — 37 bis 38 Schiller, diese Zeitschrift, Bd. 3, 1923, S. 2ff., Abschnitt II. Nur die Messungen an den kleinsten Rohren ($r = 20$ mm) sind eingetragen. Die andern zeigen Erscheinungen, die sich weder den Gesetzen der Abb. 2, noch denen der Abb. 3 oder 4 einfügen. Eine Erklärung dafür kann ich nicht geben.

1. Abb. 2 vereinigt alle Versuche an rauhen Eisenröhren, Zement, Waffelblech, Drahtnetz. Das Gesetz der Unabhängigkeit der ψ-Werte von $\mathfrak{R}$ tritt, außer für die ersten wohl ohnehin etwas unsicheren Punkte einer Versuchsreihe, deutlich hervor. Ob auch die Art, wie sich die einzelnen Kurven dem Werte $\psi = \text{konst.}$ annähern, Gesetzmäßigkeiten befolgt, oder ob die Abweichungen nur von Zufälligkeiten in den Versuchsanordnungen herrühren, läßt sich nicht entscheiden. Jedenfalls scheint es gesetzmäßig zu sein, daß die (ψ-$\mathfrak{R}$) Kurve für glatte Rohre nie unterschritten wird. Das Gesetz (6) läßt sich an den meisten Versuchsreihen nicht klar prüfen, da die Gleichheit der Wandbeschaffenheit bei verschiedenen Profilradien meist durch nichts gewährleistet ist. Die Beschaffenheit der Rohre war meist eine zufällige. Eine Ausnahme machen die mit den Zahlen 29 ÷ 34 bezeichneten Messungen von Bazin, bei welchen die Rauhigkeit künstlich durch Benageln der Holzrinne mit Brettern von 10 cm Breite und 1 cm Dicke, welche

bei den Reihen 28 ÷ 31 in 50 cm Entfernung voneinander, bei den Reihen 32 ÷ 34 in 10 cm Entfernung voneinander angebracht waren, erzeugt wurde. Die von Bazin angegebenen ψ-Werte befolgen ein Potenzgesetz, aber nicht das obige, sondern $\psi \infty \Re_1^{0,4}$, welches Forchheimer seiner empirischen Formel für den Gefällsverlust in großen Gerinnen zugrunde gelegt hat. Bazin scheint aber die Tiefe immer bis zur Sohle gemessen, also den Profilradius bei Berechnung der ψ-Werte so eingesetzt zu haben, wie wenn die hineingenagelten Bretter nicht vorhanden wären. Bestimmt man den Profilradius (so wie Fromm es tut) aus dem Volumen der Flüssigkeit, so ändern sich die ψ-Werte gegenüber Bazin und es ergibt sich bei den Meßreihen 32 ÷ 34 $\psi \infty \Re^{0,25}$, während die Korrektion bei den Meßreihen 28 ÷ 31 unbedeutend bleibt. Die Bazinschen Messungen bestätigen also das Gesetz (6) nicht gerade, aber sie widersprechen ihm auch nicht entschieden.

Wir wollen diese erste Art der Wandwirkung auf den Druckverlust als Einfluß der »Wandrauhigkeit« schlechthin bezeichnen.

2. Alle Messungen an Holzröhren und asphaltierten Eisenröhren fügen sich zwanglos den von Fromm am gewalzten Waffelblech beobachteten Gesetzen. Besonders die Messungen von Bazin an einem Holzgerinne (19) sind in dieser Hinsicht interessant, da sie wie die Frommschen mit rechteckigen Profilen (allerdings an offenen Gerinnen) und mit verschiedenen Profilradien bei gleicher Reynoldsscher Zahl angestellt wurden. Dies wurde durch Einstellung verschiedener Gefälle am unveränderten Gerinne erzielt. Auch hier zeigt sich die volle Unabhängigkeit des ψ vom Profilradius und somit die Regelung der Verhältnisse durch eine Zahl $\Re_2$. Eine Annäherung an $\psi =$ konst. bei großen Reynoldsschen Zahlen ist nicht festzustellen; nur die bei $\Re > 10^6$ angestellten Messungen von Scobey lassen vielleicht eine solche Neigung erkennen. Wir wollen diesen Wandeinfluß als »Wandwelligkeit« bezeichnen. Abb. 3 zeigt das verfügbare Material; es sieht so aus, wie wenn ein Potenzgesetz für ψ in Abhängigkeit von $\Re$ diese Vorgänge regeln würde, wobei der Exponent von $\Re_2$ abhinge. Ein derartiges Gesetz glaubte auch Ombeck[1]) aus seinem Material schließen zu können; allerdings ist die Zugehörigkeit

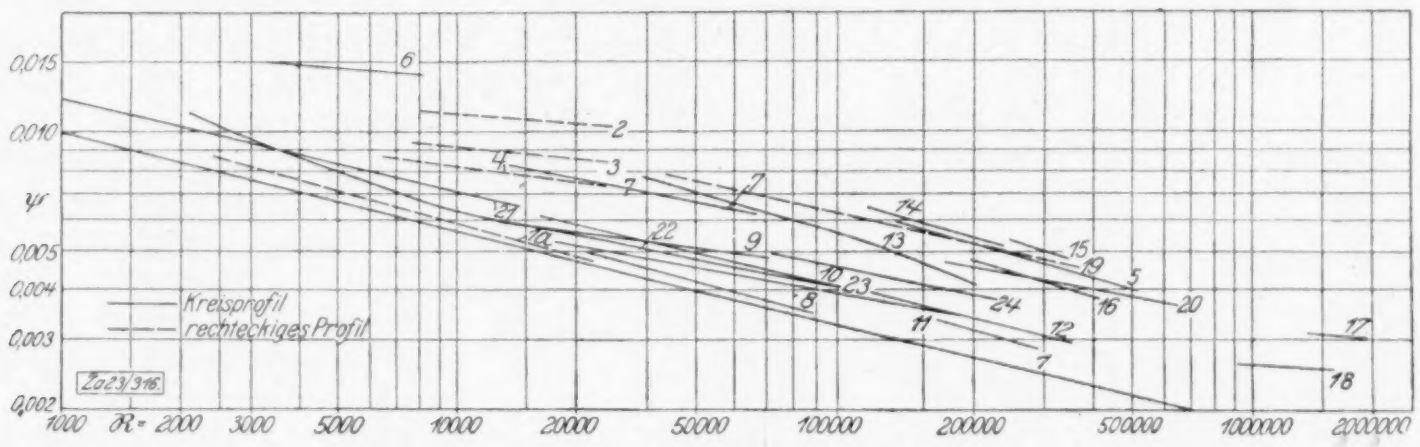


Abb. 3

1 bis 1a Blasius bezw. Fromm, glatte Wandung. — 2 Fromm, gewalztes Waffelblech, Zustand B, $r = 4{,}38$ mm, Abhängigkeit von r nachweisbar, aber sehr klein. — 3 bis 4 Fromm, weiter gewalztes Waffelblech, Zustände C und D, Unabhängigkeit von r. — 5 Marx, Wing, Hopkins, Trans. of amer. civ. eng. 40 (1898), Temperaturangabe unsicher. — 6 bis 18 Holzröhren, entnommen F. Scobey, U. S. Dep. of agriculture Bull. 376 (1916), Temperaturangaben fehlen (6 Hamilton Smith, New Almaden, Cal., $r = 8{,}15$ mm; 7 bis 10 Moritz, Sunnyside projekt, Washington, $r = 52$ bezw. 52 bezw. 91 bezw. 116 mm; 11 Moritz, Mablon pressure pipe, $r = 360$ mm; 12 dasselbe ein Jahr später, die Verschiedenheit von 11 und 12 könnte durch eine Temperaturverschiedenheit von etwa 7^0 bewirkt sein; 13 Moore, Sunnyside projekt, Washington, $r = 204$ mm; 14 Teilstrecke von 13, die Abweichung kann wohl nur zum Teil auf Temperaturverschiedenheit beruhen, die Strecke 13 war offenbar nicht sehr gleichmäßig; 15 bis 16 Noble, Seattle water works, Washington, $r = 288$ bezw. 351 mm; 17 Scobey, Salmon River Power Co., New York, $r = 930$ mm; 18 Scobey, Northwestern Electric Co., Washington, $r = 1040$ mm). Scobeys empirische Formel für Holzröhren zeigt ψ nur von $\Re$ abhängig und stimmt mit Bazin (19, 20) gut überein. — 19 Bazin a. a. O. (Abb. 2), offenes Holzgerinne mit rechteckigem Querschnitt bei drei verschiedenen Gefällen gemessen. Diese Messungen sind wohl als die exaktesten neben den Frommschen anzusehen. Bei gleichem $\Re$ findet sich keine Abhängigkeit von r. — 20 Bazin, halbkreisförmiges offenes Gerinne. Diese Kurve hat nur Sinn unter der Voraussetzung, daß ψ nur von $\Re$ abhängt; denn r ist für jeden Meßpunkt ein anderes. — 21 bis 24 Darcy a. a. O. (Abb. 2), Rohre von asphaltiertem Eisenblech, $r = 6{,}7$ bezw. 20,6 bezw. 49,0 bezw. 71,2 mm.

[1]) Ombeck, Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohren, Forschungsarbeiten d. V. d. I. 158/159 (1914).

dieses Materials zu dem Wandwelligkeits-Typus nicht sicher. Als ein Grenzfall dieser Art von Strömungen ist die Strömung in einem glatten Rohr anzusehen. Vielleicht liegt in diesem Verhalten ein Hinweis darauf, daß das Problem der turbulenten Strömung nur durch Annahme einer gewissen Wandwelligkeit richtig durchschaut werden kann und daß die turbulente Strömung in glatten Gerinnen überhaupt nur als ein solcher Grenzfall aufgefaßt werden kann.

3. Eine Sonderstellung nehmen die Messungen mit gezogenen Metallröhren ein, welche in Abb. 4 dargestellt sind; die von Saph-Schoder benutzten gezogenen Messingrohre sind als ganz glatt anzusehen; sie lagen bei Aufstellung der Blasiusschen Formel (3) hauptsächlich zugrunde. Die Messungen an gezogenen Zink- und Eisenrohren zeigen bei kleinen Reynoldsschen Zahlen ein ähnliches Verhalten wie das durch Wandwelligkeit bestimmte, bei großen Reynoldsschen Zahlen aber entschieden das durch Wandrauhigkeit bestimmte; auch bei den als neu vom Beobachter bezeichneten verzinkten Eisenrohren tritt ein derartiges Verhalten hervor. Vielleicht muß man diese Kurven so auffassen, daß bei kleinen Reynoldsschen Zahlen nur die erstere Strömungsform, bei großen nur die letztere stabil ist, und die beiden plötzlich ineinander übergehen. Aber ob diese Auffassung wirklich richtig ist, kann auf Grund des vorliegenden Materials nicht entschieden werden, vor allem, da man aus dem Versuchsmaterial nicht sieht, ob die ψ-Werte vor Erreichung des konstanten ψ-Wertes bei gleicher Wand vom Profilradius unabhängig sind oder nicht. Jedenfalls sind ja die beiden in den Abbildungen 2 und 3 niedergelegten Gesetzmäßigkeiten der Ausdruck für zwei verschiedene Formen der turbulenten Strömung, welche sehr wohl an kritischen Punkten ineinander übergehen können. Die durch Wandwelligkeit beherrschte Strömung weist wohl einen höheren Grad von Ordnung auf als die andere. Man könnte in Ermangelung klarer Vorstellung an Eigenschwingungen denken, die durch die Wandbeschaffenheit bestimmt sind. Das durch die Wandrauhigkeit erzeugte Druckgefälle ist vermutlich nur durch den hydrodynamischen Widerstand der Wanderhebungen bestimmt, wie es auch im Sinne der erwähnten Gesetzmäßigkeiten von Prandtl und v. Kármán liegt. Auch die Analogie der beiden Rauhigkeitsarten mit den verschiedenen Strömungsformen am Widerstandskörper ist naheliegend.

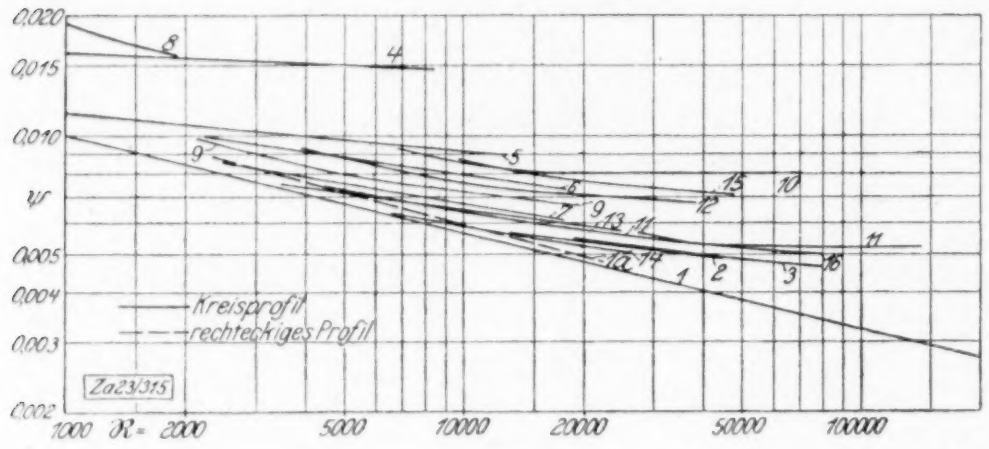


Abb. 4

1 und 1a Blasius bezw. Fromm, glatte Rohre. — 2 bis 3 Lang, Kupferrohr, $r = 1{,}23$ bezw. 1,57 mm, entnommen aus Biel a. a. O. (Abb. 2). — 4 bis 7 Saph und Schoder, verzinktes Eisenblech, $r = 2{,}22$ bezw. 3,08 bezw. 3,98 bezw. 5,04 mm, entnommen aus Blasius a. a. O. — 8 bis 9 Darcy a. a. O. (Abb. 2), gezogenes Eisen, $r = 3{,}05$ bezw. 9,88 mm. — 10 bis 11 Darcy, neues Gußeisen, $r = 24{,}8$ bezw. 34,2 mm. (Diese sehr zuverlässigen Meßreihen legen den Gedanken an einen plötzlichen Umschlag aus dem einen in den andern Strömungszustand besonders nahe.) — 12 Ombeck a. a. O., Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Röhren, Schmiedeeisen geätzt, $r = 4{,}98$ mm. — 13 bis 14 Fritzsche, Schmiedeeisen, $r = 6{,}45$ bezw. 9,75 mm (nach Ombeck). — 15 bis 16 Petit, neues verzinktes Eisenblech, $r = 65{,}0$ bezw. 84,5 mm (nach Ombeck).

Durch welche Umstände die Zugehörigkeit einer Strömung zum einen oder anderen Typus bestimmt wird, läßt sich auch nur vermuten. Entweder es ist die Größe des Verhältnisses: Erhebung zu gegenseitiger Entfernung der Erhebungen maßgebend, welches bei den Strömungen vom Typus der Wandwelligkeit erheblich kleiner ist, oder es ist die Art der Wanderhebungen maßgebend, welche beim Wandwelligkeitstypus runder und sanfter sein muß. Die erstere Auffassung wird durch Fromms Ergebnisse nahe gelegt, für die letztere Auffassung sprechen die beiden Versuchsreihen, die in Abb. 5 niedergelegt sind: Fromm hat das Drahtnetz durch eine Paraffinschicht an die Zinkplatten angedichtet. Solange das Paraffin noch fest am Drahtnetz saß und alle harten Uebergänge und Widerstände ausglich, fand sich die Kurve 1 der Abb. 5a. Nach Wegschwemmung des Paraffins durch das Wasser ergab sich die Kurve 2, die dann immer wieder gemessen wurde. Die Kurve 1 der Abb. 5b zeigt die Messungen von Marx-Wing und Hopkins an einer neuen Holzröhre. An derselben Röhre, deren Wand durch

Gebrauch unregelmäßiger geworden war, ergab sich nach zwei Jahren die Kurve 2 der Abb. 5b. In beiden Fällen war die Wirkung der Wandwelligkeit durch Rauherwerden der Wand in eine Wandrauhigkeitswirkung umgewandelt worden, wodurch der Druckabfall je nach der Reynoldsschen Zahl vermehrt oder vermindert war. Leider fehlte in beiden Fällen die Messung mit verschiedenen Profilradien, so daß das Hauptkriterium für das Auftreten des Wandwelligkeitstyps, die Unabhängigkeit vom Profilradius, nicht nachgewiesen ist. Allgemein muß man wohl sagen, daß jede Strömung mit rauhen Wänden von beiden Rauhigkeitszahlen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ beeinflußt wird; daß nur in den meisten bisher gemessenen Fällen die eine Wirkung bei weitem die andere überwiegt, so daß jedes der beiden Aehnlichkeitsgesetze für sich herrscht. Einen Uebergang, bei welchem beide Wirkungen zur Geltung kommen, scheinen die Versuche von Fromm an Waffelblech II in den Zuständen *A* und *B* zu bedeuten.

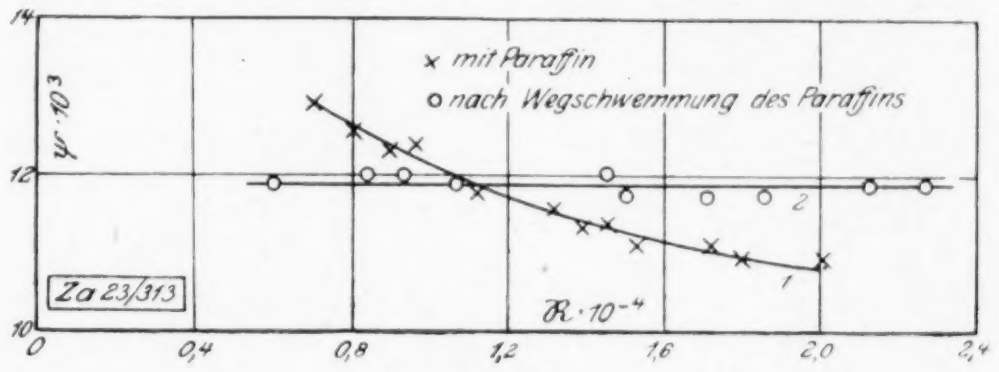


Abb. 5a

Unsere Zusammenordnung des vorliegenden Materials kann also zunächst nicht viel mehr bieten als einige provisorische Gesichtspunkte, unter welchen man die Versuche ansehen kann, und welche als Grundlage weiterer Versuche von Nutzen sein können. Hat man einmal für beide Arten von Rauhigkeiten die Diagramme $\psi(\mathfrak{R}, \mathfrak{K})$ bestimmt, so kann für jede Wand mit guter Genauigkeit die Rauhigkeitskonstante k bezw. $\mathfrak{K}_2$ aus einem Versuch, auch im Modell, bestimmt werden, und man ist in der Lage, den Druckabfall mit der Genauigkeit vorherzubestimmen, welche die Natur des Problems verlangt. Die Grenze für die praktisch wünschenswerte Genauigkeit ist ja durch die Aenderung infolge Verrostens oder anderweitiger Abnutzung gegeben; aber es ist wichtig, auch diese Grenze quantitativ kennen zu lernen, und für die theoretische Forschung sind exakte Messungen unerläßlich. Es ist noch eine große Anzahl von Versuchen notwendig, bis die grundlegenden ψ-$\mathfrak{R}$-$\mathfrak{K}$-Diagramme im Bereich der technisch vorkommenden Strömungen bestimmt sind. Solche Versuche im größeren Maßstabe sind im Aerodynamischen Institut Aachen in Vorbereitung. Vielleicht regen diese Ausführungen auch an anderer Stelle zu weiteren Versuchen an.

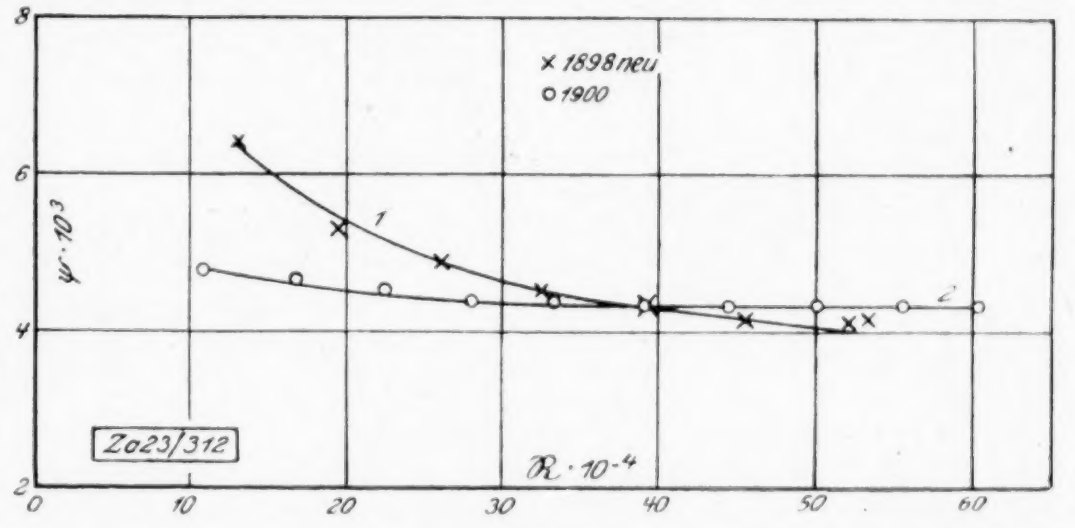


Abb. 5b

7. Bemerkungen über die empirischen Formeln der Hydraulik. Aus den Diagrammen der Abb. 2 bis 4 kann man ohne Mühe für gewisse Bereiche einfache empirische Formeln herleiten; eine einzige Formel, welche beide Arten der Rauhigkeit und alle praktischen Bereiche der Reynoldsschen Zahlen umfaßt, ist beim jetzigen Stand unserer Kenntnisse nicht erhältlich. Die empirischen Formeln sind meist ohne bewußte Berücksichtigung des Aehnlichkeitsgesetzes und ohne klare Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches abgeleitet. Die einzige Formel, für welche das nicht gilt, ist die von v. Mises, welche nur eine Rauhigkeitszahl $\mathfrak{K}_1$ annimmt und die absteigenden Teile der ψ-$\mathfrak{R}$-Kurven als Annäherungen an Bereiche $\psi =$ konst. auffaßt; sie lautet in unserer Schreibweise:

$$10^3 \psi = 2{,}4 + \sqrt{\mathfrak{K}} + \frac{300}{\sqrt{2\,\mathfrak{R}}}.$$

Diese Formel kann, da sie nur das Aehnlichkeitsgesetz der »Wandrauhigkeit« enthält, nur auf die in den Abb. 2 und vielleicht 4 vereinigten Meßergebnisse angewand

werden. Verwandt mit dieser Formel ist die von Biel[1]), welche ohne Berücksichtigung der Aehnlichkeitsgesetze von Biel in der Form gegeben ist:

$$10^3\,\psi = 2g\left(0{,}12 + \frac{f}{\sqrt{r}} + \frac{b\,\nu}{v\sqrt{r}}\right).$$

Mit Berücksichtigung der Aehnlichkeitsgesetze muß man diese Formel schreiben:

$$10^3\,\psi = 2g\left(0{,}12 + \sqrt{\mathfrak{K}_1} + \frac{b\,f}{\sqrt{\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}_1}}\right).$$

Soll also die Formel nur den einen Rauhigkeitsparameter $\mathfrak{K}_1$ enthalten, so müßte das Produkt der beiden von Biel angegebenen Konstanten bf unabhängig von der Wandbeschaffenheit sein. Dies ist nun nach Biels Angaben der Fall für das Versuchsmaterial, das Biel in seine mittleren Rauhigkeitsgrade II bis IV einordnet, ($bf \infty 150$), aber nicht für I und V. Man kann auch bf als einen weiteren Rauhigkeitsparameter $\mathfrak{K}_2$ auffassen; doch scheint auch dann die Form der Gleichung nicht sehr geeignet zur Darstellung der Wandwelligkeitserscheinungen (Abb. 3). Die langsamere Annäherung an das Gesetz $\psi =$ konst. bei geringeren $\mathfrak{K}_1$-Werten, welche in der Bielschen Formel gegenüber der Misesschen zum Ausdruck kommt, kann man vielleicht aus Abb. 4 herauslesen. Zwingend ist diese Folgerung aber nicht.

Manche Formeln der Praxis, wie z. B. die viel verwendete von Kutter und Ganguillet, sind schon dadurch sinnlos, daß dieselbe Maßzahl, welche die Rauhigkeit charakterisieren soll (n bei K. und G.), in derselben Formel als Länge und als dimensionslose Zahl vorkommt. Brauchbarer scheinen die sog. abgekürzten Formeln (Bazin, Kutter), welche ψ nur als Funktion von r geben, also die Rauhigkeitszahl $\mathfrak{K}_1$ zugrunde legen. Sie sind natürlich nur für Wandrauhigkeit (Abb. 2) und für große $\mathfrak{R}$ verwendbar. Andere Formeln, wie die von Lang und von Ombeck[2]), sind bei Wandwelligkeit zu gebrauchen (Abb. 3), sowie auch bei gezogenen Röhren mit nicht zu großem $\mathfrak{R}$ (Abb. 4), wofür sie ursprünglich aufgestellt sind.

In jüngster Zeit sind Potenzformeln besonders beliebt, welche nach dem Vorbild der alten Chézyschen Formel $v = c\sqrt{r\,J}$ (c eine Konstante, $J = \frac{H}{l}$ Gefälle) gebildet sind. Man schreibt:

$$v = \lambda\, r^{\mu}\, J^{\nu}.$$

Besonders Forchheimer[3]) hat das Versuchsmaterial unter dem Gesichtspunkt einer solchen Formel durchgearbeitet und schlägt für große Gerinne, also große Reynoldssche Zahlen $\mu = 0{,}7$ $\nu = 0{,}5$ vor. In unserer Schreibweise müßte eine solche Potenzformel lauten:

$$\psi = \text{konst.}\ \mathfrak{R}^x\ \mathfrak{K}^y = \text{konst.}\ k^y\ \mathfrak{R}^x\ r^{-y},$$

wobei die Konstante noch von der Wandbeschaffenheit ($\mathfrak{K}_2$) abhängen kann. Zwischen μ und ν einerseits und x und y andererseits bestehen die Beziehungen:

$$x = \frac{1}{\nu} - 2\,, \qquad y = \frac{\mu+1}{\nu} - 3\,.$$

Exponenten zu finden, welche unter allen Umständen brauchbar sind, ist ausgeschlossen; aber für die Grenzfälle sind die Potenzformeln heute entschieden allen anderen vorzuziehen. So gilt für glatte Gerinne nach Blasius (3):

$$x = -0{,}25\ \ y = 0 \qquad \text{oder} \qquad \nu = 0{,}57\ \ \mu = 0{,}71$$

bezw. nach Fromm (3a):

$$x = -0{,}27\ \ y = 0 \qquad \text{oder} \qquad \nu = 0{,}58\ \ \mu = 0{,}73$$

Für die in Abb. 3 angeführten Messungen an Holzröhren interpoliert Scobey $\mu = 0{,}65$, $\nu = 0{,}556$; dies bedeutet $x = -0{,}20$, $y = -0{,}03$. Natürlich ist dieser y-Wert $= 0$ zu setzen in Uebereinstimmung mit unseren Darlegungen zu Abb. 3. Denn ein Anwachsen von ψ mit r ist natürlich nicht möglich. Auch einige andere von Forchheimer zitierte Interpolationsformeln können deswegen keine Gültigkeit beanspruchen, da sie auf negative y-Werte führen. Für den Bereich der Unabhängigkeit von $\mathfrak{R}$ (Abb. 2, $x = 0$, $\nu = 0{,}50$) gilt nach Forchheimer $\mu = 0{,}70$, $y = 0{,}40$, nach Fromm $\mu = 0{,}61$,

---

[1]) Biel, Forschungsarbeiten des V. d. I., Heft 44 (1907).
[2]) Zitiert bei Fromm, dieses Heft, S. 356.
[3]) Ph. Forchheimer, Durchfluß des Wassers, Springer 1923.

$y = 0{,}314$. Letztere Zahlwerte sind wohl besser experimentell gestützt als erstere; doch sind die praktischen Unterschiede nicht so bedeutend, wie die Empfindlichkeit der Exponenten μ und y vermuten läßt, wenn man nur die Anwendung der Formeln auf das Gebiet der ψ-$\Re$-Ebene beschränkt, für das sie aus den Versuchen abgeleitet sind. Die empirischen Formeln sind leere Hüllen, solange für die Koeffizienten, welche die Wandbeschaffenheit charakterisieren (k, $\Re_2$), keine sicheren Messungen vorliegen. Solche sind nur zu erhalten, wenn bei Ausführung und Auswertung der Versuche den Forderungen der mechanischen Aehnlichkeitsgesetze Rechnung getragen wird. 286

Strömungswiderstand in rauhen Rohren.

Von **K. FROMM** in Düren (Rhld.).

(Mitteilung aus dem aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

Aufgabe der Versuche war es, den Einfluß der Wandrauhigkeit auf das Druckgefälle bei einer Strömung in rauhen Rohren systematisch zu untersuchen. Die theoretischen Grundlagen der Untersuchungen, die in der voranstehenden Abhandlung von L. Hopf dargelegt sind, sollen hier nicht wiederholt werden.

I. Versuchsanordnung und Meßverfahren.

1. Allgemeine Anordnung der Versuche. Das Versuchsrohr besteht aus zwei 4 mm starken Zinkplatten, 2 m lang und 20 cm breit, welche an den Enden mit Winkelflanschen versehen wurden. Zwei Eisenschienen von rechteckigem Querschnitt werden zwischen die Platten gelegt und durch eine große Zahl von Schrauben mit diesen verbunden. Der erzeugte Strömungsquerschnitt hat eine Breite von $b = 15$ cm, während die Dicke der Schienen $s = 7{,}5;\ 10;\ 15;\ 20;\ 25$ mm beträgt. Durch Einsetzen der verschieden dicken Schienen als auch durch Kombination mehrerer Schienen verschiedener Dicke konnte die Rinnenhöhe verändert werden, wobei die geometrische Form der Strömung in allen Fällen mit großer Annäherung dieselbe bleibt, da die Breite der Strömung im Verhältnis zur Höhe sehr groß war.

Um die Abhängigkeit des Koeffizienten ψ in der Formel

$$\frac{h}{l} = \psi \frac{1}{r} \frac{v^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

zu bestimmen, müssen die mittlere Strömungsgeschwindigkeit v und das Druckgefälle h bei einer Meßstrecke l und dem Profilradius r ermittelt werden. Um die Zähigkeitszahl ν (kinematische Zähigkeit) des Wassers richtig einsetzen zu können, war eine Thermometerablesung nötig; die Zähigkeitszahlen sind dann den Angaben von Blasius[1]) entnommen. Die mittlere Geschwindigkeit v ergibt sich aus dem Verhältnis von sekundlicher Durchflußmenge Q durch den Rinnenquerschnitt F. F ergibt sich aus dem Produkt Rinnenhöhe $\times$ Rinnenbreite. Die durch Versuch zu ermittelnden Größen erstrecken sich also auf Wassermengen- und Temperaturmessung, auf Rinnenabmessung nach Länge und Querschnitt und auf Druckgefällemessung für eine bestimmte Meßstrecke l der Rinne. Die Gesamtversuchseinrichtung ist aus Abb. 1 ersichtlich. Die Wasserströmung nimmt folgenden Verlauf: Durch ein 2″-Gasrohr gelangt das Wasser zu dem Hauptabsperrschieber b, durch welchen die der Versuchsrinne zuströmende Wassermenge reguliert wird, passiert den Dreiweghahn c und ergießt sich in den 5,75 m hoch über dem Fußboden befindlichen Hochbehälter d, welcher bis zum oberen Rand der Trennwand e aufgefüllt sein muß, damit das Wasser unter konstantem Druck der Versuchsrinne zufließen kann. Die Konstanz des Druckes ist dadurch erreicht, daß das Wasser im Hochbehälter bei stärkerem Zufluß als notwendig über die Trennwand überfließen kann und durch das $1^1/_2$″-Ueberlauf-Gasrohr ins Freie dem Abfluß zufließt. Aus dem Hochbehälter selbst fließt das Wasser durch die im Boden befindliche runde Düse f in ein $2^1/_2$″-Gasrohr dem Regulierschieber i zu, durch welchen die Wasserströmung eine Feinregulierung erfährt. Das Wasser ergießt sich dann in den 1,5 m langen, 25 cm hohen und 20 cm breiten Beruhigungskessel k, welcher mit dem Windkessel j versehen ist. In dem höher gelegenen Teile des Kessels ist vertikal ein Glasrohr von 50 mm lichte Weite eingebaut, durch das die vom Wasser mitgeführte im Beruhigungskessel sich sammelnde Luft nach oben entweichen kann. Der Wasserstand im Glasrohr selbst stellt ein Maß für den im Beruhigungskessel

[1]) Blasius, Forschungsheft 131, herausgeg. v. Ver. deutsch. Ingenieure 1913.

herrschenden Wasserdruck dar und bestimmt mit das Maß der Regulierung durch den Regulierschieber i. Eine derartige Entlüftung erwies sich als dringend notwendig, da größere mitgeführte Luftmengen die Meßergebnisse trüben können, einesteils dadurch, daß die Wasserströmung stoßartig erfolgt, andererseits dadurch, daß die Luft in den Zuführungen zu den Manometern sich festsetzt. An dem düsenförmigen Ende des Beruhigungskessels sind Winkelflansche ähnlich denen des Versuchsrohres p angebracht, an denen das Versuchsrohr selbst durch Verschraubung befestigt wird. Die Dichtung erfolgt durch eine Gummiplatte, welche die rechteckige Oeffnung, 160×33 mm, des Beruhigungskessels frei läßt. In den Winkelflanschen selbst sind längliche Bohrungen angebracht, so daß das Versuchsrohr p bei Rinnenhöhen bis zu 32 mm max. angeschlossen werden kann. Die Rinne besitzt eine Länge von 2 m, liegt horizontal auf dem Tische o und wird hier für jeden vorzunehmenden Versuch mit der Wasserwage eingerichtet. Aus dem Versuchsrohr selbst strömt das Wasser durch die offene Rinne r dem Auffanggefäß s zu, in welchem vermittelst eines Quecksilberthermometers die Wassertemperatur t_w ermittelt wird. Von hier strömt das Wasser durch die mit Kielflossen versehene Ueberlaufrinne t dem Sammeltopf u zu und von hier durch das Lochblech v in das Poncelet-Gefäß w. Von hier tritt das Wasser durch die scharfrandige Düse x ins Freie und wird durch die Abflußrinne y abgeführt.

2. Wassermengenmessung. Die im aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule zur Verfügung stehende Wassermenge betrug im Durchschnitt 10 l/sek. Für die Wassermengenmessung wurde ein Poncelet-Gefäß mit zwei vertikal angeordneten scharfrandigen Düsen verwandt. An einer kommunizierenden Glasröhre konnte mit Hilfe einer Millimeterskala der Wasserstand im Gefäß über der Düsenmitte abgemessen werden. Für die Poncelet-Gefäßöffnungen wurden Verschlußplatten vorgesehen, so daß sowohl Düsen vom gleichen Durchmesser gleichzeitig für große Wassermengen als auch eine allein für kleinere benutzt werden konnten. Auf diese Weise ergab sich ein Meßbereich von $Q = 2$ bis $Q = 10$ l/sek bei Düsendurchmessern von $d = 55, 50, 45$ mm. Bei kleineren Mengen erfolgte die Messung derart, daß für die Auffüllung eines Poncelet-Gefäßes von $H_1 = 200$ bis $H_2 = 600$ mm die Zeit z mit der Stoppuhr ermittelt wurde. Die dieser Differenz $H_2 - H_1$ entsprechende Wassermenge war vorher für alle Messungen durch Abwägen festgestellt worden zu $Q' = 69{,}75$ l. Hieraus ergibt sich die gesuchte Wassermenge $Q = \frac{Q'}{z}$.

In einem Vorversuch wurde das Poncelet-Gefäß mit den verschiedenen Düsen geeicht. Dem Poncelet-Gefäß selbst mußten wegen der großen Zuströmgeschwindigkeit des Wassers Beruhigungsmittel vorgeschaltet werden, um den Wasserspiegel in dem Wasserstandsglas möglichst schnell in Beharrungszustand zu bringen. Als ein solches Beruhigungsmittel wurde ein Auffanggefäß ähnlich dem Poncelet-Gefäß verwandt, in welches das zuströmende Wasser durch ein tief in das Gefäß eintauchendes Rohr eingeleitet wurde. An dem Auffanggefäß wurde eine breite Ueberlaufrinne t angebracht, die mit Kielflossen in der Strömungsrichtung versehen war, so daß jede hin- und herwallende Bewegung des Wassers beseitigt wurde. Diese Ueberlaufrinne führte das Wasser unmittelbar in den Sammeltopf u, dessen Boden mit einem Lochblech v versehen war, welches das Wasser über den Querschnitt des eigentlichen Meßgefäßes gleichmäßig verteilte. Auf diese Weise bildete sich sehr schnell im Wasserstand ein Beharrungszustand aus, bei dem H an der Millimeterskala abgelesen werden konnte.

Die Eichung der Düsen ging in der Weise vor sich, daß unterhalb der Düsen eine auf Rollen fahrbare Wage aufgestellt wurde, auf der sich ein großes Auffanggefäß befand. Hatte sich bei bestimmter Wassermenge, die mit dem Hauptabsperrschieber b in der Wasserzuleitung eingestellt werden konnte, ein Beharrungszustand im Poncelet-Gefäß ausgebildet, so wurde die Wage mit dem Auffanggefäß unter den Wasserstrahl der geöffneten Düsen gefahren und mit der Stoppuhr die Zeit abgestoppt, die zur Füllung des Gefäßes um eine bestimmte Gewichtsdifferenz notwendig war. Gleichzeitig wurde am Meßgefäß der Wasserstand abgelesen. Es besteht die Beziehung

$$Q^2 = c\,H + k_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin c und k_0 Konstante sind. In einer Zeichnung wurden die Q^2-Werte in Abhängigkeit von H graphisch aufgetragen und nach der Methode der kleinsten Quadrate, da für die Düsen 55 I und II und 50 I und II die Versuchspunkte streuten, auf Grund der Beziehung (2) ausgeglichen.

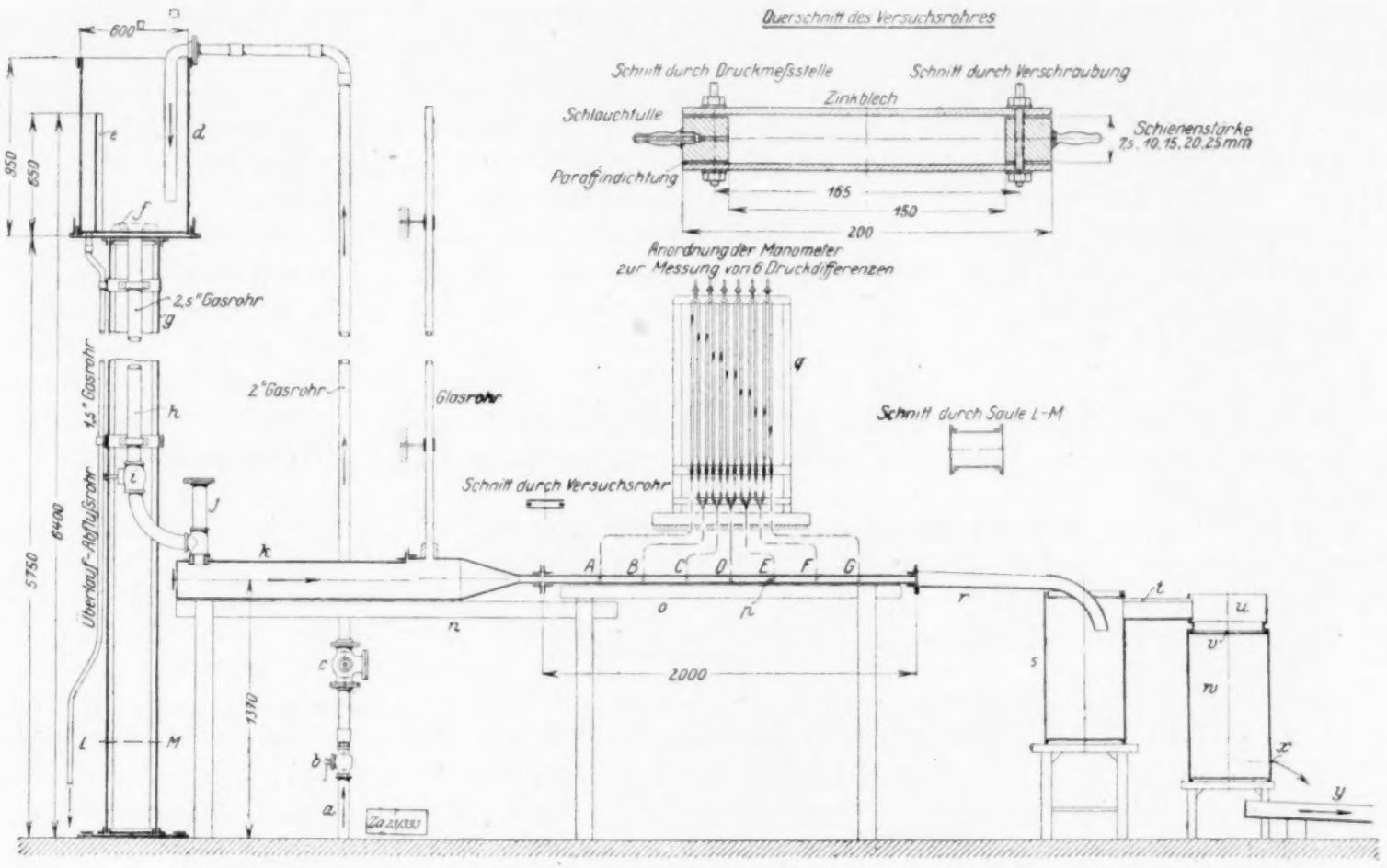


Abb. 1

Schematische Anordnung der Versuche

3. Messung des Druckabfalls. Zur Ermittlung des Druckhöhenverlustes wurden bei Untersuchung der glatten Rinne die Meßstellen benutzt, welche in *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* und *G* in gegenseitigem Abstand von 21 cm auf der oberen Rinnenplatte derart angebracht waren, daß das Wasser durch senkrechte Bohrungen vermittelst Schlauchtüllen und Schläuchen den Differenzmanometern *q* zugeführt werden konnten. Die Schlauchtüllen selbst sind Messingröhrchen von 1 mm Bohrung, die so glatt wie möglich in die obere Platte auf der Längsmittellinie eingepaßt waren, damit die Strömung an der Meßstelle nicht gestört wurde, und die Druckmessungen reinen statischen Druck und keinen Anteil von Staudruck zeigten. *A*, die erste Meßstelle, befindet sich 31 cm hinter der Eintrittskante des Versuchsrohres. Den 7 Bohrungen entsprechend wurden 6 *A*-förmige Glasrohrmanometer von ungefähr 1 m Länge verwandt, wie sie in Abb. 1 ersichtlich sind.

Die Höhenlage der Wasserspiegel in den einzelnen Manometern konnte dadurch verändert werden, daß die oberen Hähne bei bestimmter Höhe der Wasserspiegel in den Glasröhren geschlossen wurden. Hinter den Manometerrohren waren Skalen angebracht, welche mit $^2/_{10}$ mm-Teilung versehen waren, so daß auch bei kleineren Druckdifferenzen zwischen den einzelnen Meßstellen die Druckdifferenz selbst

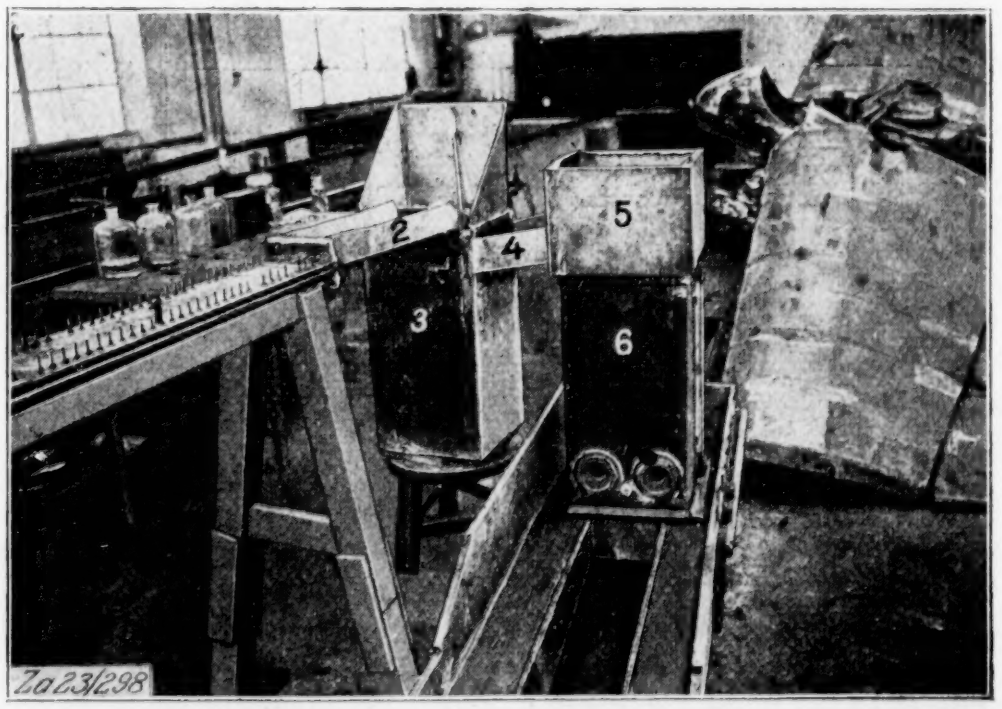


Abb. 2

1 Versuchsrohr, 2 Ueberlaufrinne, 3 Auffanggefäß, 4 Ueberlaufrinne mit Kielflossen, 5 Sammeltopf, 6 Ponceletgefäß.

vermittelst einer Lupe genauer abgelesen werden konnte. Die Manometer wurden vertikal aufgestellt, so daß an ihnen unmittelbar der Druckhöhenverlust h in mm abgelesen werden konnte.

Bei den eigentlichen Rauhigkeitsmessungen mußten die zuerst benutzten Meßstellen verlassen werden. Durch Anbringung der Rauhigkeitselemente an der oberen und unteren Platte des Versuchsrohres, als auch auf Grund der Bedingung zur Messung rein statischen Druckes, mußte die Druckentnahme an Bohrungen der glatten Schienen erfolgen. Hierin zeigt sich der Vorteil der Verwendung des Rechteckrohres gegenüber dem Kreisrohr, bei dem keine Gewähr dafür gegeben ist, daß nicht statischer Druck ± einem Anteil an Staudruck durch die Manometer angezeigt wird, wenn die Druckentnahme durch eine Bohrung im Rauhigkeitselement erfolgt. Die Schlauchtüllen wurden in jeder Schiene angebracht und vermittelst Schläuchen und T-förmiger Glasröhrchen miteinander verbunden, so daß die Manometer einen Mittelwert der Druckentnahmestellen zeigten.

Die mittlere Rinnenhöhe d wurde vor jedem Versuch derart ermittelt, daß das Versuchsrohr mit Wasser in vertikaler Stellung aufgefüllt wurde. Aus der aufgefüllten abgewogenen Menge sowie aus Länge und Breite der Rinne ergibt sich ohne weiteres die Rinnenhöhe d.

II. Versuchsergebnisse.

4. Glatte Rinne, turbulentes Gebiet. Zunächst erstreckten sich die Messungen auf eine glatte Rinne. Um möglichst vollkommene Glattheit zu erhalten, wurden die sorgfältig bearbeiteten Zinkplatten noch mit Metallfirnis überzogen, damit Ablagerungen von Kalk und Bildung von Zinksalzen verhindert wird. Die Abdichtung zwischen Schienen und Platten erfolgte durch 0,75 mm dicke Gummibänder.

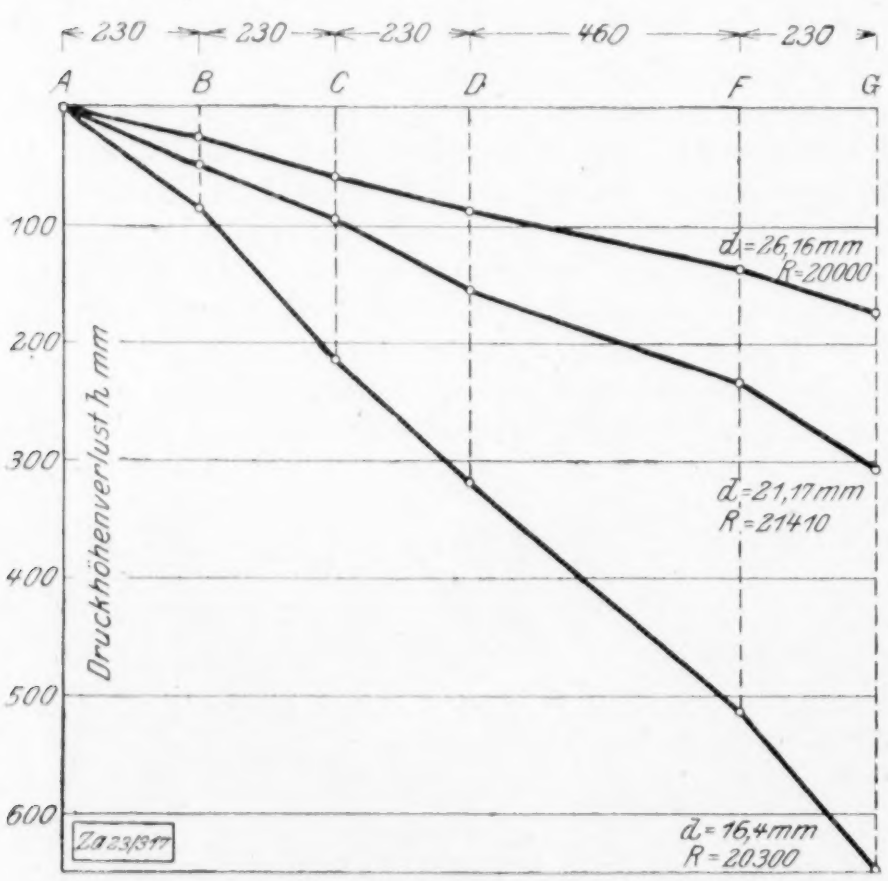


Abb. 3

Bei jedem Profilradius ist in einem Vorversuch der Druckabfall von Meßstelle zu Meßstelle ermittelt worden. Der Druckabfall für die Teilstrecken (vergl. Abb. 3) zeigt an und für sich nicht unerhebliche Abweichungen. Man kann sich jedoch überzeugen, daß diese Abweichungen nicht systematischer Natur sind, z. B., die Endstrecken $A\,B$ und $F\,G$ ausgenommen, nicht von der Nähe der Einlauf- oder Auslaufstellen abhängen, sondern lediglich durch geringe unregelmäßige Abweichungen der Rinnenhöhe bedingt sind. Schon geringe Schwankungen der Dicke und damit der mittleren Geschwindigkeit, etwa 1 vH, können nach dem Bernoullischen Gesetz Druckschwankungen hervorrufen, die für die Teilstrecke von 23 cm Fehler bis über 10 vH in ψ ergeben.

Die ψ-Werte sind als Funktion der reduzierten Geschwindigkeit (Reynoldsschen Zahl) $R = v\,r : \nu$ in Abb. 4 aufgetragen, während Abb. 5 dieselbe Beziehung in logarithmischem Maßstab wiedergibt. Außerdem ist der Druckhöhenverlust h bei der Meßstrecke $B\,F$ ($1 = 92$ cm) in Abb. 6 logarithmisch aufgezeichnet.

Die Messungen mit verschiedenen Rinnenhöhen ergeben mit guter Annäherung eine einzige Kurve. Dies ist praktisch insofern wichtig, als dadurch die Brauchbarkeit des Begriffes des Profilradius, der zunächst nur durch die einfache Vorstellung einer Wandreibung in die praktische Hydraulik eingeführt wird, erwiesen wird. Verwendet man in der Formel für ψ an Stelle des Profilradius die halbe Rinnenhöhe, so ergibt sich eine systematische Abhängigkeit von der Rinnenhöhe.

Nach dem Aehnlichkeitsgesetz muß ψ in Gl. (1) beim glatten Rohr Funktion allein von $R = v\,r : \nu$ sein. Die älteren Formeln, z. B. von Darcy[1]), Weisbach[2]), Lang[3]) und Biel genügen dieser Forderung nicht. Bei Darcy ist λ nur von d, bei Weisbach nur von v, bei Lang von v und d und bei Biel für glatte Rohre ebenfalls nur von v und d abhängig. Fritzsche[4]) stellt sogar die Behauptung auf, daß die Druckverlustziffer bei Luft unabhängig vom Zähigkeitskoeffizienten ist.

Für den turbulenten Strömungsbereich hat Blasius[5]) 1913 an Hand des bis dahin vorhandenen experimentellen Materials, insbesondere auf Grund der Versuche von Saph-Schoder[6])

$$\lambda = 4\,\psi = 0{,}3164 \left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{0{,}25} \qquad (3)$$

ermittelt, wobei d der Rohrdurchmesser, während Saph und Schoder ihre Ergebnisse mittels desselben Potenzgesetzes ohne Berücksichtigung der Zähigkeit in der Form

$$\frac{h}{l} = \text{konst.}\,\frac{v^{1{,}75}}{d^{1{,}25}} \qquad (4)$$

zusammenfaßten. Beachtet man, daß der Profilradius des Kreises $^1/_4$ des Durchmessers ist, so wird aus (3):

$$\psi = 0{,}05594\,R^{-0{,}25} \qquad (5).$$

Zum Vergleich ist diese Funktion zu meinen Meßergebnissen in den Diagrammen mit eingezeichnet.

Meine Ergebnisse geben interpoliert die Beziehung

$$\psi = 0{,}0705\,R^{-0{,}27}, \qquad \frac{h}{l} = \text{konst.}\,\frac{v^{1{,}73}}{r^{1{,}27}} = \text{Konst.}\,\frac{v^{1{,}73}}{d^{1{,}27}} \qquad (6).$$

Zu der Abweichung der Exponenten in Gl. (5) und (6) ist zu sagen, daß sich aus den von Blasius verwandten Meßergebnissen infolge der Streuung der Meßpunkte in den Diagrammen ein Potenzgesetz mit dem Exponent 0,27 für v mit demselben Recht interpolieren läßt, wie ein Gesetz mit 0,25. Blasius gibt in der Aufzeichnung der Saph-Schoderschen Versuche die Streuung mit ± 2 vH um die Mittelwerte an[7]).

Reynolds, der zuerst das Aehnlichkeitsgesetz ausgesprochen hat, hat in seiner Arbeit auch Versuche veröffentlicht und empfiehlt ein Potenzgesetz, in dem das Druck-

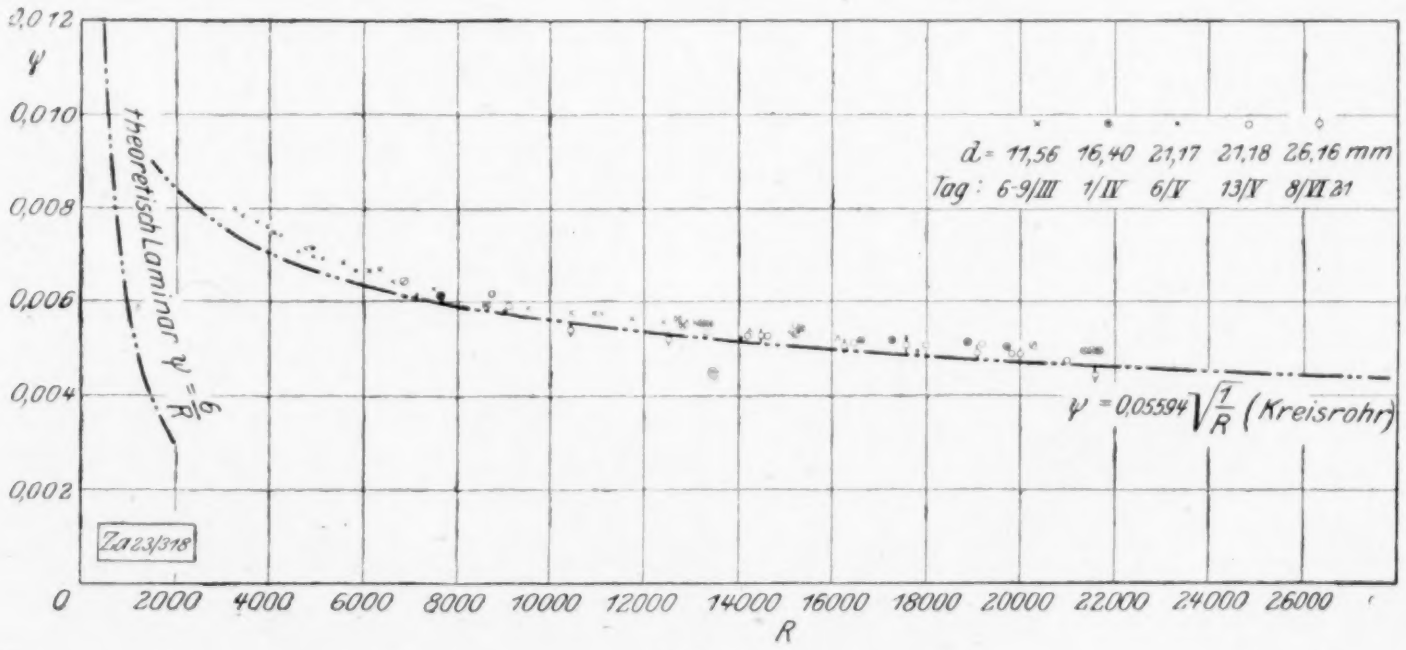


Abb. 4

[1]) Darcy, Rech. Exp. rel. au mouvement de l'eau dans les tuyeaux. Paris 1857.

[2]) Weisbach, Hütte I, 21. Aufl., S. 293.

[3]) Lang, Hütte I, 21. Aufl., S. 293.

[4]) Fritzsche, Untersuchungen üb. d. Strömungswiderstand der Gase in geraden zylindrischen Rohrleitungen. Mitt. üb. Forschungsarb., V. d. I., 1908, Heft 60.

[5]) Blasius, Forschungsheft 131, herausgeg. v. Ver. deutsch. Ingenieure, 1913.

[6]) Saph-Schoder, Transact. of the am. soc. of civ. eng. 1903, Bd. 51.

[7]) Blasius gibt a. a. O. S. 12 an, daß er die Beiwerte in der Formel $\lambda = a + b\left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^n$ viermal aus je drei Wertpaaren λ und $v\,d/\nu$ zu berechnen versucht habe. Dabei fand sich für n zweimal der Wert 0,28 und je einmal 0,35 und 0,225.

gefälle proportional $v^{1,723}$ ist. λ würde demnach proportional $\left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{0,277}$ sein. Die Abweichungen zwischen Blasius und Reynolds, die in der Funktion $\lambda = f\left(\frac{\nu}{v \cdot d}\right)$ sowohl den Exponenten als auch das konstante Glied betreffen, vermutet Blasius in einem systematischen Versuchsfehler in den Reynoldsschen Messungen. Immerhin ist es auffallend, wie der von Reynolds ermittelte Exponent mit dem von mir gefundenen übereinstimmt. Auf eine weitere Stütze für den Vorzug des von mir ermittelten Exponenten 0,27 gegenüber 0,25 komme ich später zurück.

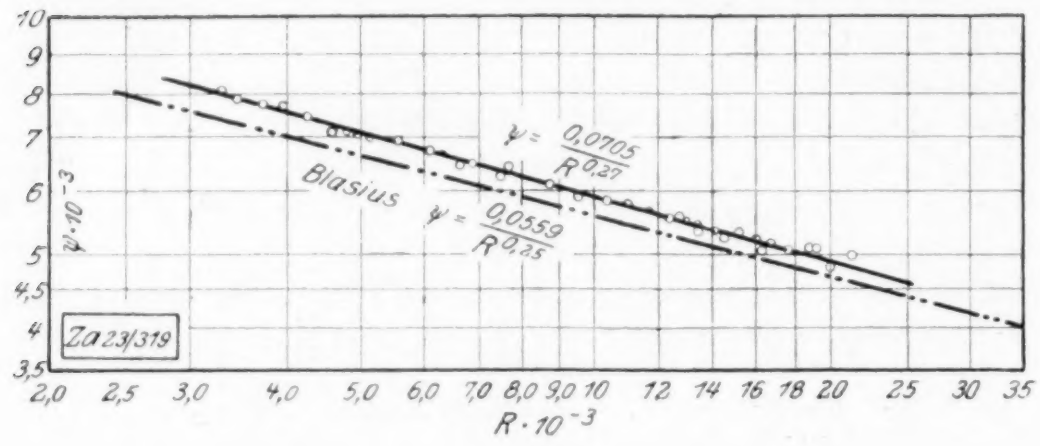


Abb. 5

Stärker weichen von Blasius und meinen Ergebnissen die von Ombeck[1]) ab, der aus Messung strömender Luft interpolierte:

$$\lambda = 0{,}242 \left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{0,224}.$$

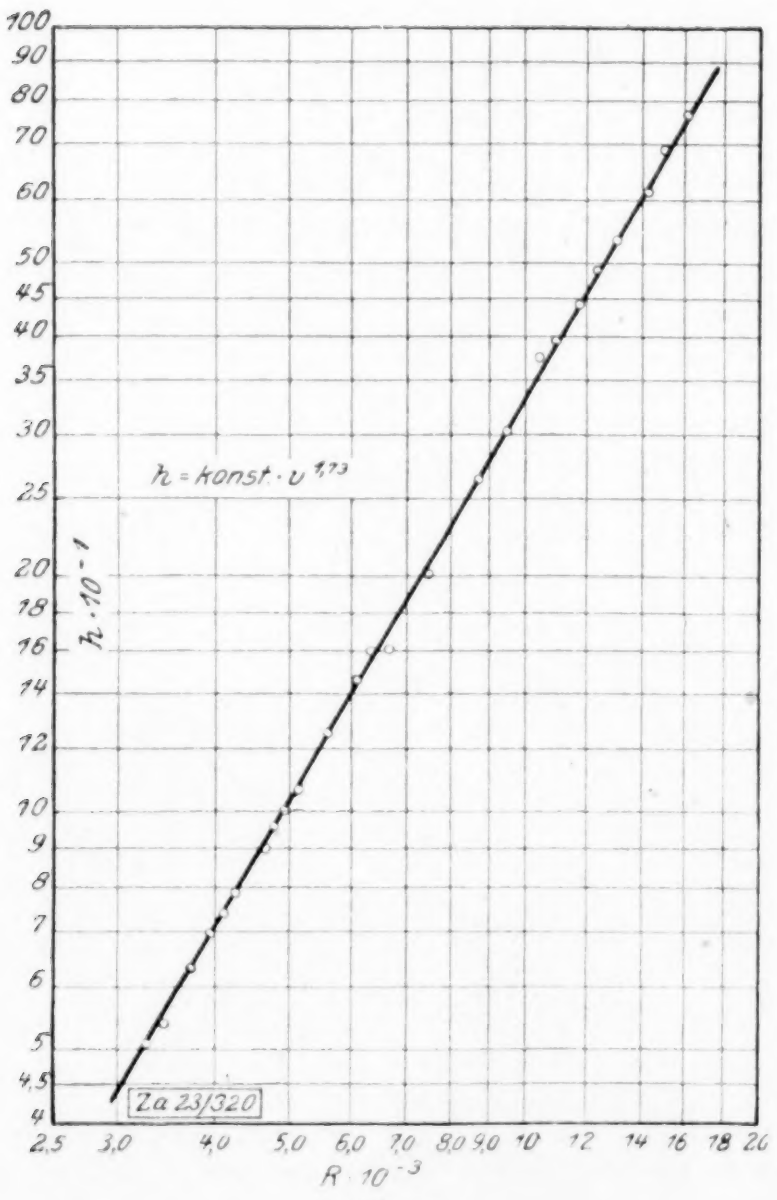


Abb. 6

5. Glatte Rinne, laminares Gebiet. Von einer experimentellen Untersuchung der glatten Rinne im laminaren Gebiet wurde Abstand genommen, da mit den vorhandenen Manometern die Druckdifferenzen nicht hinreichend genau ermittelt werden konnten. Zum Vergleich füge ich die errechnete Kurve bei. Hierzu sehe ich die Rinne als unendlich breit an und vernachlässige den Einfluß der Seitenwände (Abb. 7).

Betrachten wir einen Flüssigkeitsstreifen von der Höhe dy im Abstande y von der Rohrmittellinie, so ist die auf die Fläche $y\,d$ wirkende Kraft $W = h\,\gamma\,y\,b$. Dieser hält das Gleichgewicht die in der Höhe y auf den Flächenstreifen $b\,l$ von der Schubspannung herrührende Kraft $-\mu \frac{du}{dy} b\,l$. Es ist also

$$h\,\gamma\,y\,b = -\mu \frac{du}{dy} b\,l \quad . \quad (7),$$

worin h den Druckhöhenverlust der Meßstrecke l, μ den Zähigkeitskoeffizienten, b die Rohrbreite und u die Geschwindigkeit, abhängig von y, bedeutet. Durch Integration von (7) unter der Bedingung $u = 0$ für $y = r =$ halbe Rinnenhöhe ergibt sich

$$u = {}^1/_2 \frac{h}{l} \frac{\gamma}{\mu} [r^2 - y^2] = {}^1/_2 \frac{Jg}{\nu} (r^2 - y^2).$$

Weiter erhält man

$$dQ = dy\,b\,u = {}^1/_2 \frac{Jg}{\nu} b\,(r^2 - y^2)\,dy, \quad Q = {}^2/_3 \frac{J\,b\,g}{\nu} r^3.$$

[1]) Ombeck, Forschungsheft 158, herausgeg. v. Ver. deutsch. Ing. 1914.

Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich daher zu

$$v = \frac{Q}{2\,r\,b} = \frac{J}{3}\,\frac{g\,r}{\nu}.$$

Es ist daher $$J = \frac{h}{l} = \frac{\psi}{r}\,\frac{v^2}{2\,g} \quad \text{mit} \quad \psi = \frac{6\,\nu}{v\,r} = \frac{6}{R} \qquad (8).$$

Diese Funktion ist in Abb. 4 eingezeichnet.

6. Rauhe Rinne, erstes Rauhigkeitselement: Drahtnetz. Als erstes Rauhigkeitselement wurde analog den Versuchen von Hopf ein Eisendrahtnetz von 0,45 mm Drahtstärke und 1,6 mm Maschenweite verwendet. Besondere Schwierigkeiten ergaben sich beim Anbringen des Netzes auf den Platten des Versuchsrohres, da das Netz an allen Stellen der Rinne die wirkliche Oberfläche bilden sollte, und das Wasser keine Gelegenheit haben durfte, zwischen Netz und Wand zu strömen. War das Netz nur unter Vorspannung eingebaut und durch die Befestigungsschrauben der Rinne unter Spannung gehalten, so ergaben sich bei ein und derselben Rinnendicke dauernd abweichende Ergebnisse für ψ. Die Rauhigkeit blieb also nicht gleich, was darauf zurückgeführt wurde, daß das Netz nicht überall gleichmäßig auf den Platten auflag, sondern Zwischenräume entstehen ließ, die dem Wasser eine Strömung zwischen Netz und Platte gestatteten. Diese Zwischenräume änderten sich dauernd in Abhängigkeit von der Stärke der Strömung.

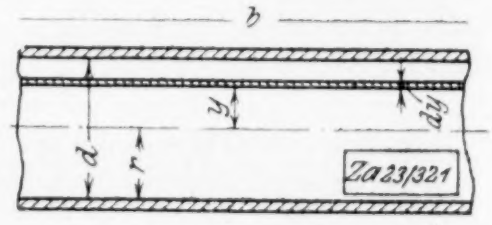


Abb. 7

Um eine dauernd gleichbleibende rauhe Wand zu erzielen, wurden die unter Spannung auf die Platten aufgelegten Netzteile durch heißes, flüssiges Paraffin innig mit den Platten verbunden, so daß zwischen Netz und Platte keine Zwischenräume mehr entstehen konnten. Das Paraffin wurde dann so weit mit einer Drahtbürste aus den Maschen herausgebürstet, daß die Oberfläche des Gewebes frei lag und das Paraffin nur noch ein Bindeglied zwischen Netz und Platte darstellte.

Die Auflagestellen der Schienen wurden mit einer gleichmäßigen, dünnen Paraffinschicht versehen, welche die zur Dichtung bei der glatten Rinne verwandten Gummibänder ersetzte. Die Abdichtung vermittelst Paraffin hat sich auch bei den größten herrschenden Wasserdrücken bestens bewährt.

Die nun einsetzenden Versuche erwiesen auch anfangs noch eine starke Veränderlichkeit der Rauhigkeit, da die Strömung fortwährend noch Paraffinpartikelchen von der Netzoberfläche wegspülte, die der Strömung an der Oberfläche der rauhen Wand im Wege standen. Es dauerte längere Zeit, bis sich nach fortwährendem Abspülen eine konstante Rauhigkeit gebildet hatte.

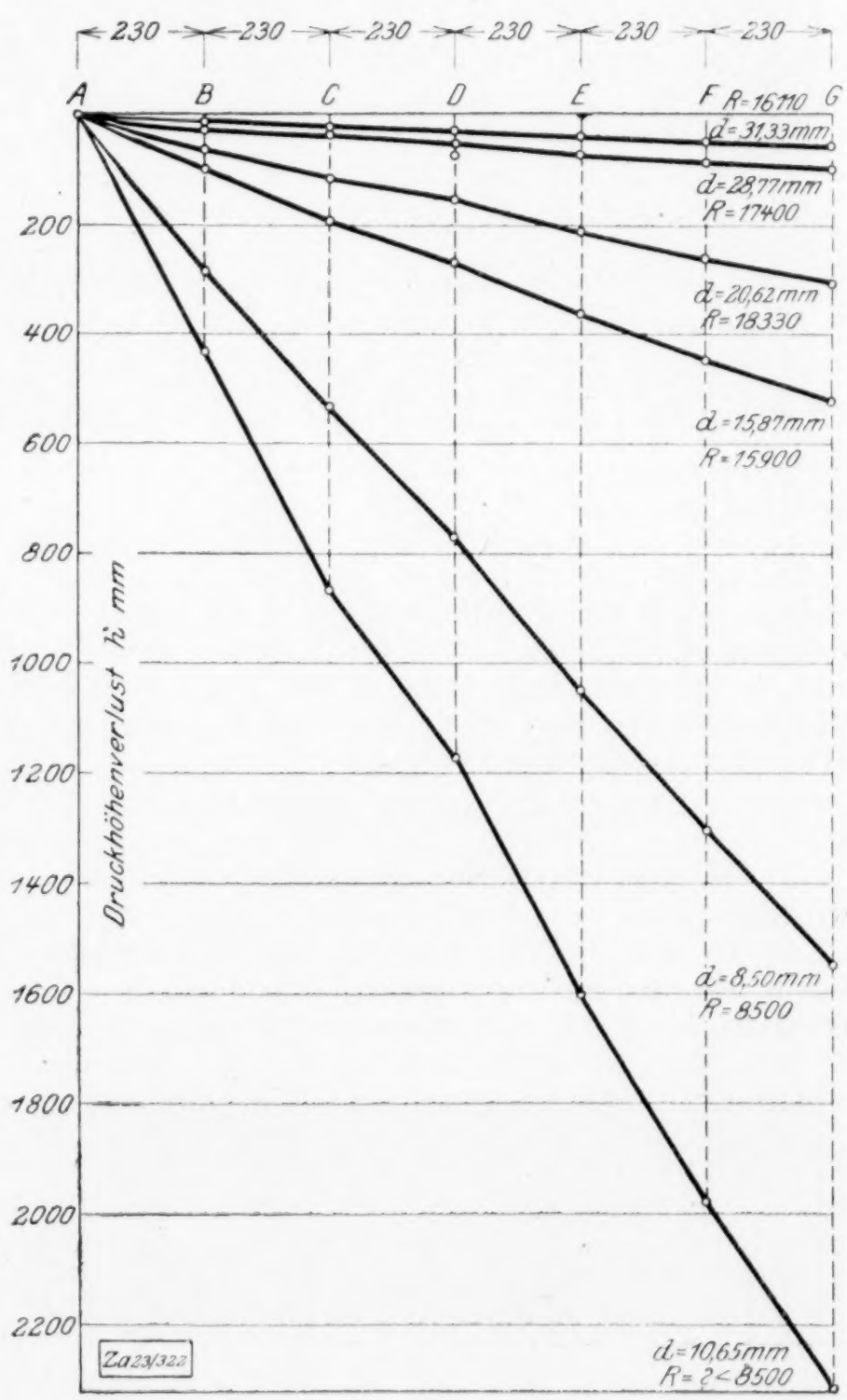


Abb. 8

Es ergibt sich nun die Schwierigkeit, daß ein Teil der Berandung glatt, ein anderer rauh ist. Eine unveränderte Verwendung des Profilradiusbegriffes zur Bestimmung von ψ ist daher unbegründet. Man könnte allerdings mit Berücksichtigung der Verschiedenheit der »Reibungskoeffizienten« einen »effektiven Profilradius« errechnen. Statt dessen habe ich es vorgezogen, infolge der Unsicherheit eines solchen Begriffes die ψ-Werte einfach auf die halbe Rinnenhöhe zu beziehen. Die Erfahrung zeigte, daß die gewonnenen Kurven bei diesem Ordnungsprinzip weniger Streuung der Einzelpunkte aufweisen. Für jede Rinnenhöhe wurde wieder wie bei der glatten Rinne in einem Vorversuch die Verteilung des Druckhöhenverlustes für die einzelnen Teilstrecken festgestellt. Der Druckhöhenverlauf über die Rinnenlänge ist für jede Rinnenhöhe zu einer bestimmten Reynoldsschen Zahl in Abb. 8 eingetragen. Die Abweichungen der Druckdifferenzen an den einzelnen Teilstrecken sind bei dem rauhen Rohr viel geringer als beim glatten. Für fast alle Rinnenhöhen gibt sowohl die Meßstrecke BF als auch AG Werte, welche sehr genau mit den nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelten Mittelwerten übereinstimmen.

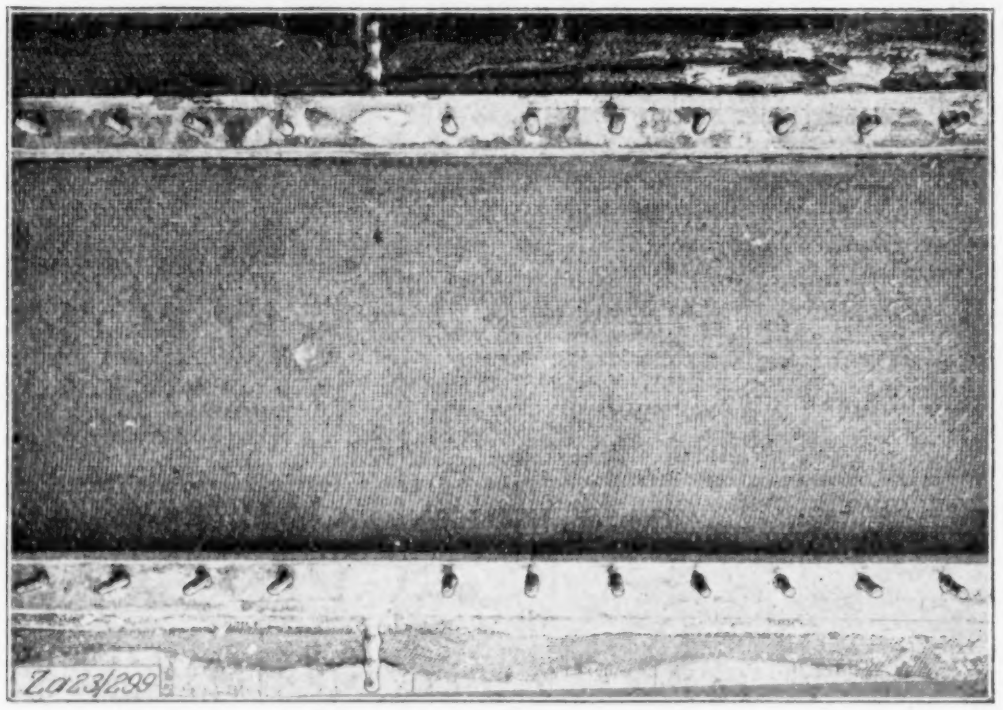


Abb. 9
Rohr mit Drahtnetzwand

Abb. 9 zeigt das Versuchsrohr mit der aufgebrachten Drahtnetzrauhigkeit. Abb. 10 zeigt einen Vertikalschnitt in der Strömungsrichtung durch die größte Erhebung des von der Drahtnetzoberfläche abgenommenen Gipsabzuges in 5facher Vergrößerung. Bezeichnet man mit λ die Wellenlänge der einzelnen Erhebungen und mit ε die halbe größte Erhebung, so ergab eine mikroskopische Messung

$$\varepsilon = 0{,}115 \text{ mm},$$

$$\lambda = 1{,}6 \text{ mm}, \qquad \frac{\varepsilon}{\lambda} = 1 : 14.$$

Allen Kurven, die die Versuchsergebnisse, ψ als Funktion von R, darstellen, ist zunächst gemeinsam, daß oberhalb einer gewissen Grenze von R etwa in der Umgebung von $R = 12000$ die Kurven parallel zur Abszissenachse verlaufen. Hier ist also ψ konstant und nicht mehr von v und ν abhängig, sondern nur noch von der Rinnenhöhe d. Wir haben also reines quadratisches Widerstandsgesetz vor uns, dem wir die Form geben können

$$\frac{h}{l} = f(d)\,\frac{1}{d}\,\frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

In Abb. 11 sind die Meßergebnisse für die 8 verschiedenen Rinnenhöhen graphisch wiedergegeben.

In der später folgenden Abb. 29 sind die der Formel (9) entsprechenden Grenzwerte von ψ, die wir mit $\psi_{\text{konst.}}$ bezeichnen wollen, in Abhängigkeit von d in logarithmischem Maßstabe aufgetragen. Die experimentell ermittelten Punkte ordnen sich hier zu einer geraden Linie von der Steigung $n = -0{,}314$, so daß wir $\psi_{\text{konst.}} = f(d)$ als Potenzgesetz hinschreiben können in der Form

$$\psi_{\text{konst.}} = \text{konst.}\; d^{-0{,}314} \quad (10).$$

Das quadratische Widerstandsgesetz erhält hiernach die Form

$$\frac{h}{l} = \text{konst.}\;\frac{v^2}{d^{1{,}314}} \quad . \quad (10').$$

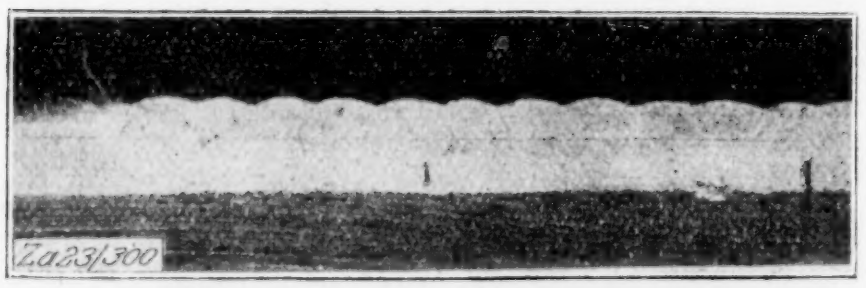


Abb. 10

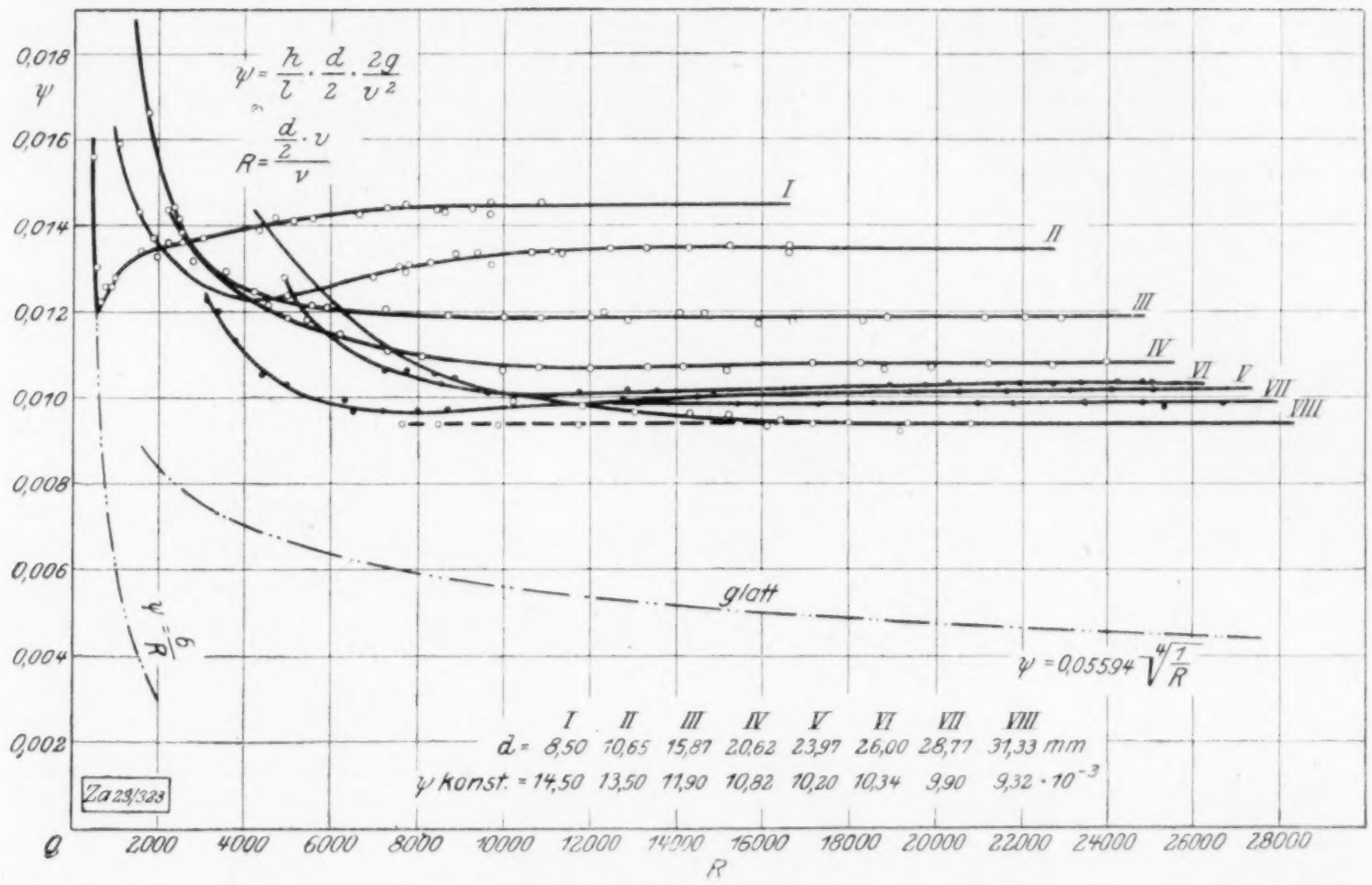


Abb. 11

Auf eine Diskussion dieser Beziehung komme ich später zurück.

Bei kleinerem R, etwa unterhalb 12 000, ist der Verlauf der ψ-Kurven in der Regel derart, daß ψ mit abnehmendem R ein wenig abfällt, um dann im Uebergangsgebiet zwischen turbulenter und laminarer Strömung stark zuzunehmen. Bei verschiedenen Kurven erfolgt der Anstieg bei verschiedenen R-Werten. Auffallend ist dagegen, daß bei einem Versuch — $d = 8{,}5$ mm — ψ mit abnehmendem R dauernd abnimmt, um bei $R = \sim 500$ in die theoretisch laminare Strömung von der Beziehung $\psi = \frac{6}{R}$ überzugehen. Die Uebergangsstelle stimmt gut mit den bei zylindrischen Rohren gewonnenen Ergebnissen überein (vergl. z. B. die neuesten Messungen von Schiller[1]). Das Verhalten der ψ-Werte bei kleineren R läßt folgende Erklärung möglich erscheinen: Der Verlauf von ψ erinnert an das Verhalten der laminaren Strömung; aber von einer ausgebildeten Poiseuilleschen Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung kann nicht die Rede sein, dazu sind die ψ-Werte zu groß, fast 6 mal so groß, als dem theoretischen Wert entspricht. Außerdem schwanken die gemessenen Werte in einem breiten Streifen. Beobachtet man jedoch die Strömung an ihrem freien Austritt an dem Versuchsrohr, so sieht man einen Wechsel in der Strömungsform. Der Strahl hat ein klares anscheinend laminares Aussehen bis zu der Reynoldsschen Zahl, von welcher ab ψ konstant ist, und ein trübes turbulentes Bild oberhalb dieser Grenze. Es fragt sich nun, wie die hohen ψ-Werte mit einer laminaren Strömungsform vereinbart werden können.

L. Schiller hat gezeigt, daß man eine scheinbare Erhöhung der ψ-Werte im laminaren Gebiet erhält, wenn der Versuchsstrecke keine genügend lange »Anlaufstrecke« vorgeschaltet wird. Nimmt man z. B. an, daß bei unserer Versuchsrinne das Wasser aus dem breiteren Beruhigungskessel mit ungefähr gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt eintritt und die parabolische Geschwindigkeitsverteilung sich erst später einstellt, so muß der Druckhöhenverlust für die ersten Streckenanteile bedeutend größer sein, als nach der Formel $\psi = \frac{6}{R}$ gerechnet wurde. Verfolgt man jedoch nach den von Th. v. Kármán[2]) angegebenen Methoden der Impulsbetrachtung den Verlauf der Geschwindigkeitsverteilung rechnerisch, so ergibt sich zwar eine bedeutende Erhöhung von ψ, doch reicht diese Erhöhung zur Erklärung der gemessenen ψ-Werte nicht einmal annähernd aus.

[1]) Schiller, diese Zeitschr. 2, 1922, S. 96 bis 106.
[2]) v. Kármán, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 233 bis 252.

Als eine andere Erklärungsmöglichkeit erwähne ich folgende von v. Kármán ausgesprochene Vermutung: Betrachtet man die einzelnen Drahterhebungen des Netzes als Widerstandskörper, so kommt jeder einzelnen Erhöhung eine gewisse Reynoldssche Kennziffer zu, die sich aus Drahtdurchmesser, mittlerer Geschwindigkeit zwischen Tal und Berg und aus der kinematischen Zähigkeit ergibt. Rechnet man diese Kennziffer aus, so kommt man zu Werten, welche von derselben Größenordnung sind wie diejenigen Kennziffern, bei welchen die im freien Luftstrom gemessenen Widerstandskoeffizienten von Drähten eine starke Erhöhung mit abnehmender Kennzahl zeigen. Es liegt also die Möglichkeit vor, daß der Wechsel der Strömungsform mit dem Wechsel des Widerstandsgesetzes zusammenhängt.

Abb. 12
Rinne mit Waffelblech I.

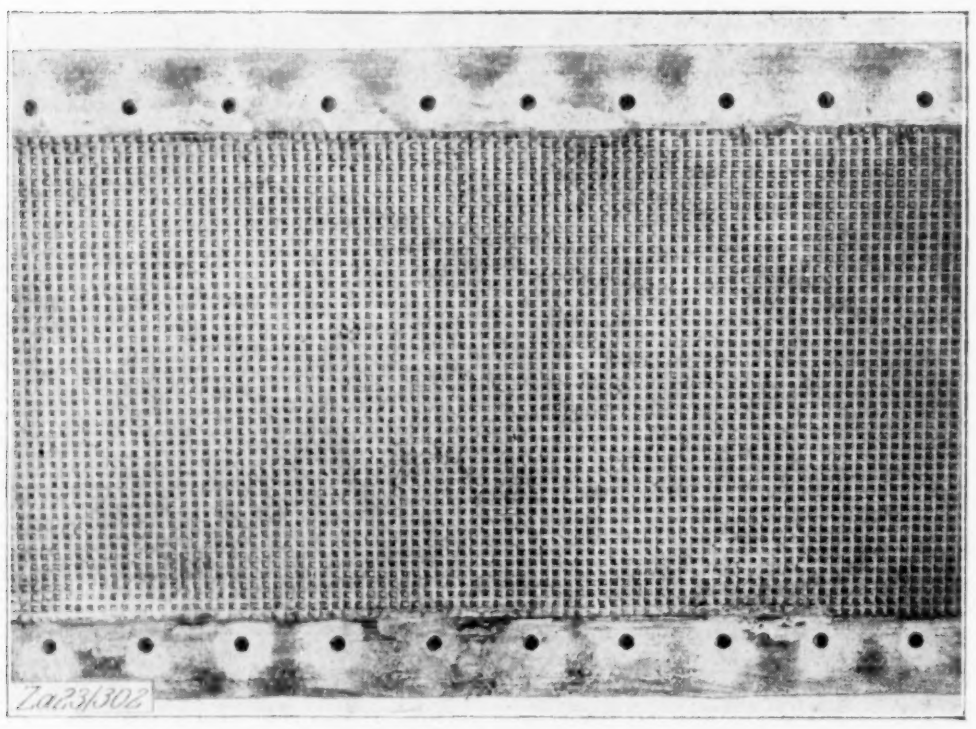


Abb. 13

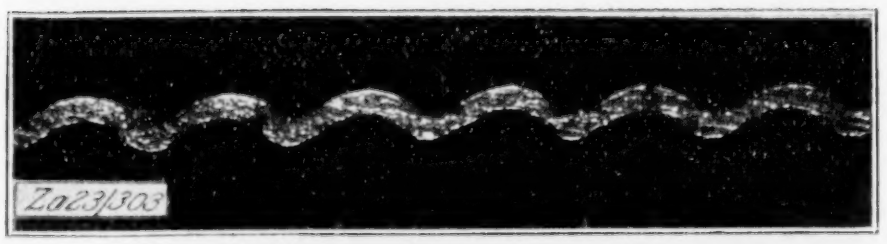


Abb. 14

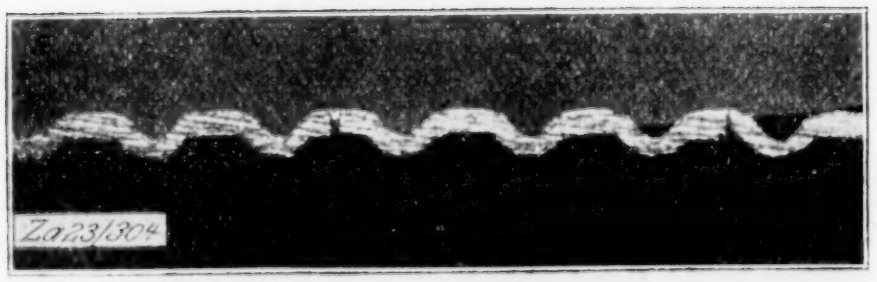


Abb. 15

7. Zweites Rauhigkeitselement: Waffelblech I. Als zweites Rauhigkeitselement wurde ein Waffelblech aus Zink verwendet, wie es als Trittbrettbelag gebräuchlich ist. An mehreren Stellen wurden die 15 cm breiten Bleche auf die Zinkplatten aufgeschraubt und an den Rändern verlötet, damit kein Wasser zwischen Blech und Rinnenplatte treten konnte. Abb. 12 bis 13 stellen die Rinne mit den aufgebrachten Waffelblechen, Abb. 14 in 5facher Vergrößerung einen Vertikalschnitt in Strömungsrichtung durch die Mitte einer pyramidenstumpfförmigen Erhebung dar, während Abb. 15 einen Schnitt an derselben Stelle quer zur Strömungsrichtung wiedergibt.

Die mikroskopische Untersuchung des Originalschnittes ergab

$$\varepsilon = 0{,}427 \text{ mm},$$

$$\lambda = 3{,}58 \text{ mm}, \quad \frac{\varepsilon}{\lambda} = 1 : 11{,}9.$$

Abb. 16 zeigt den Druckabfall über die gesamte Rinnenlänge, Abb. 17 gibt die graphische Darstellung der Ergebnisse für die verschiedenen Rinnenhöhen. Der Verlauf der ψ-Kurven ist qualitativ derselbe wie bei dem Drahtnetz, doch zeigt sich hier an den erhöhten ψ-Werten für annähernd gleiche Rinnenhöhe der Einfluß der größeren Rauhigkeit. In Abb. 29 sind die $\psi_{\text{konst.}}$-Werte wiederum logarithmisch eingezeichnet.

8. Drittes Rauhigkeitselement: Waffelblech II in vier Rauhigkeitsgraden *A*, *B*, *C*, *D*. Als nächstes Rauhigkeitselement

wurde wieder ein Zinkwaffelblech gewählt, bei dem gegenüber Waffelblech I die mittleren Erhebungen höher schienen, während die Zahl der Erhebungen pro Längeneinheit kleiner war als bei Waffelblech I. Die Anbringung war die gleiche, s. Abb. 18, die Messungen erfolgten auf dieselbe Art. Um weitere Rauhigkeitsgrade zu erhalten, wurden gleiche Waffelbleche dieser Art in verschiedenen Graden ausgewalzt und genau in derselben Weise untersucht wie das erste Waffelblech. Abb. 19 bis 22 zeigen Schnitte in der Strömungsrichtung durch die größte Erhebung in dreifacher Vergrößerung. Die mikroskopische Untersuchung des ersten Waffelblechs II ergab

$$\varepsilon = 0{,}429 \text{ mm}, \quad \lambda = 6{,}62 \text{ mm}, \quad \frac{\varepsilon}{\lambda} = 1:15{,}4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}.$$

Abb. 23 gibt die Ergebnisse graphisch wieder. Es entspricht die Kurvenschar *A* dem ursprünglichen Waffelblech II, Kurvenschar *B* dem Waffelblech II in gewalztem Zustande, Kurvenschar *C* in stark gewalztem Zustande und Kurvenschar *D* in noch stärker gewalztem Zustande. Zu Abb. 23 ist zu bemerken, daß der Verlauf der Kurven ψ als Funktion von R grundsätzlich verschieden ist von den Ergebnissen bei Drahtnetzoberfläche und bei der Oberfläche von Waffelblech I. Wir bemerken mit zunehmendem R einen sanft abfallenden Verlauf von ψ. Ein Uebergang zu reinem quadratischem Widerstandsgesetz, d. h. ein Verlauf der Kurven parallel zur Abszissenachse zeigt sich nur in den Anfängen bei dem ungewalzten Waffelblech II oberhalb $R = 20\,000$. Die dem quadratischen Widerstandsgesetz entsprechenden $\psi_{\text{konst.}}$-Werte sind wiederum in Abb. 29 in logarithmischem Maßstabe aufgetragen und erfüllen das Potenzgesetz

$$\psi_{\text{konst.}} = \text{konst. } d^{-0{,}314} \qquad (9),$$

von dem bereits auf Seite 346 und 348 die Rede war.

Kurvenschar *A* zeigt für ψ eine starke Abhängigkeit vom Profilradius, Kurvenschar *B* keine so starke, während *C* und *D* kaum noch eine Abhängigkeit erkennen lassen. Abb. 24 stellt den Druckverlauf über die gesamte Rinnenlänge für Rauhigkeitsgrad *A* dar.

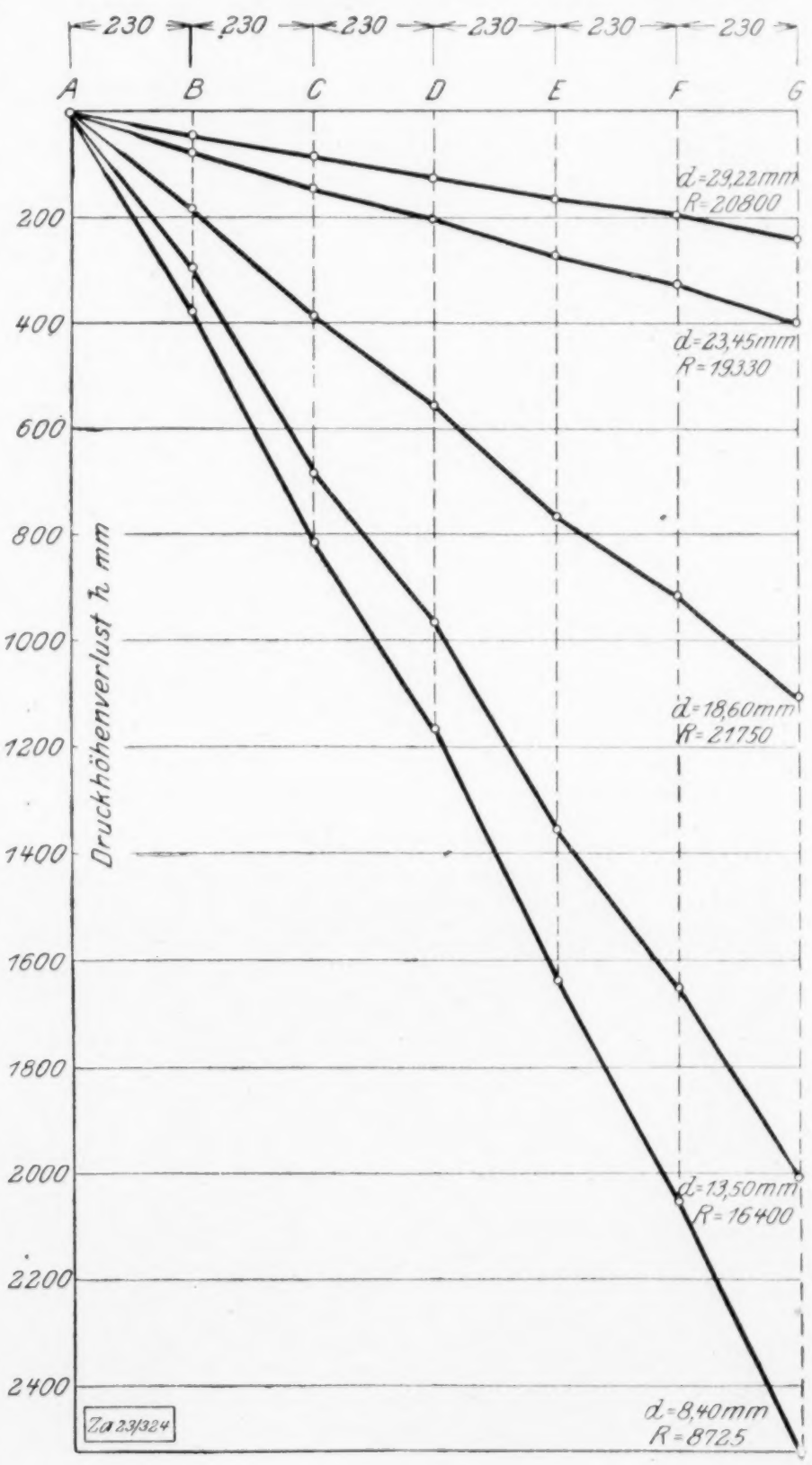


Abb. 16.

9. Viertes Rauhigkeitselement: Genutetes Zinkblech (Sägeprofil). Ein weiteres Rauhigkeitselement lieferten Zinkplatten von 5 mm Stärke, die quer zur Strömungsrichtung mit 1,5 mm tiefen Nuten nach Art eines Sägeprofils versehen wurden. Hierzu Abb. 25 und 26.

Die Platten selbst erhielten die Abmessungen der ursprünglichen Zinkplatten, so daß sie ohne weiteres mit den vorhandenen Schienen zu einem Rechteckrohr zusammengesetzt werden konnten. Das Sägeprofil selbst bot für die Untersuchungen zwei Rauhigkeits-

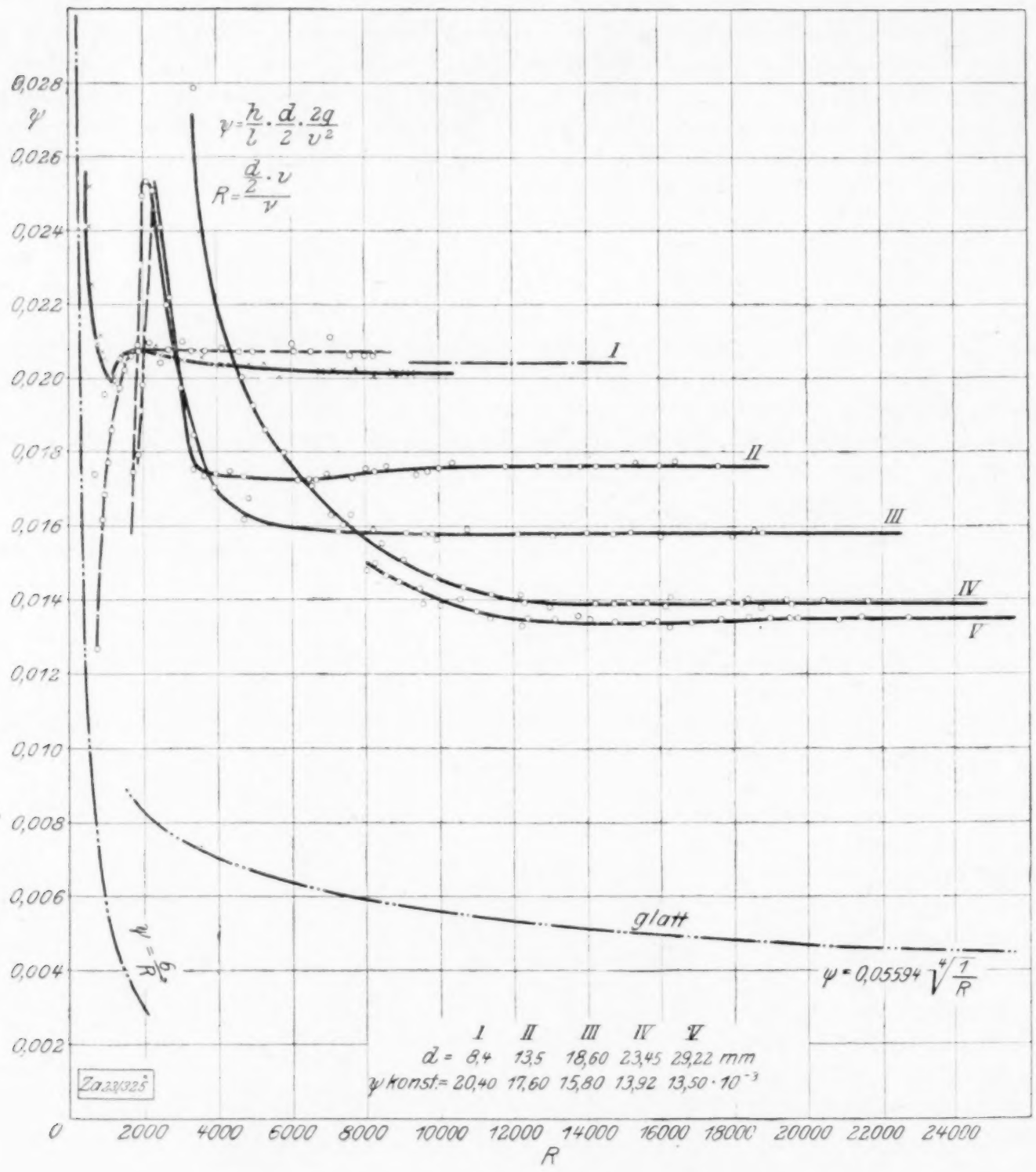


Abb. 17

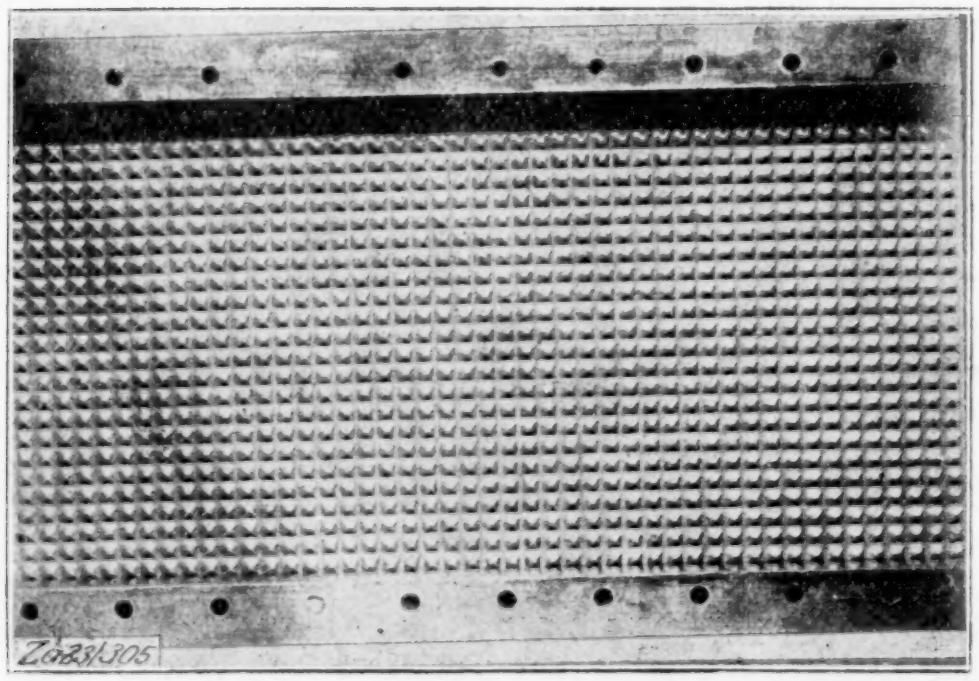


Abb. 18
Rinne mit Waffelblech II

grade, je nachdem wie die Rinne an den Beruhigungskessel k angeschlossen wurde. Strömt das Wasser gegen die steile Wand des Rauhigkeitselementes, so erfährt die Strömung einen größeren Widerstand, als wenn das Wasser gegen die flachere Wand strömt. Um dies zu erreichen, brauchte nur beim Anschluß an den Beruhigungskessel Eintritt und Austritt der Rinne vertauscht zu werden. Abb. 27 gibt die Ergebnisse für kleineren und für größeren Widerstand wieder.

Der Verlauf der Kurven bei der Strömungsrichtung mit kleinerem Widerstand entspricht den Kurven-

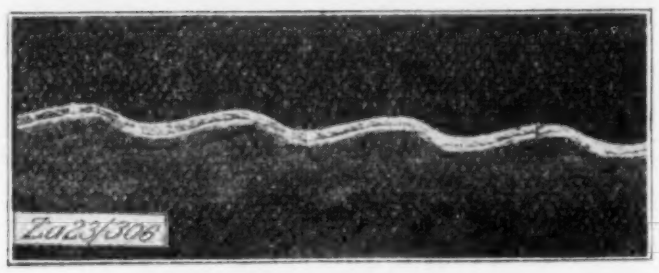


Abb. 19

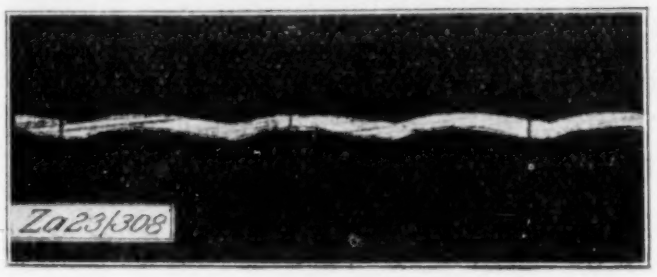


Abb. 21

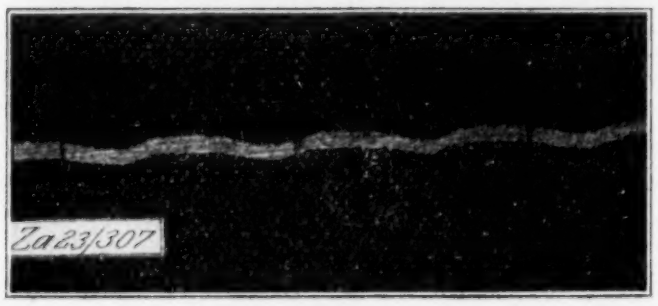


Abb. 20

Abb. 22

scharen von Waffelblech II. Das quadratische Gebiet wird erreicht bei Reynoldsschen Zahlen oberhalb 20000.

Für gleiche Rinnenhöhen erhalten wir für die ungünstigere Strömungsrichtung annähernd doppelt so hohe ψ-Werte wie bei der Strömung in der günstigeren. Außerdem ist der Verlauf der ψ-Kurven ein grundverschiedener. Bei größerem Widerstand nimmt ψ mit abnehmendem R ab analog der Messung beim Drahtnetz mit $d = 8{,}5$ mm, und quadratisches Widerstandsgesetz wird nicht erreicht.

Abb. 28 stellt wiederum den Druckabfall über die gesamte Rinnenlänge dar.

Die dem quadratischen Widerstandsgesetz entsprechenden konstanten ψ-Werte sind wiederum in Abb. 29 in logarithmischem Maßstab aufgezeichnet.

Die geometrischen Abmessungen des Rauhigkeitselementes waren hier

$$\varepsilon = 0{,}75 \text{ mm}, \qquad \lambda = 4{,}25 \text{ mm}, \qquad \frac{\varepsilon}{\lambda} = 1:5{,}65.$$

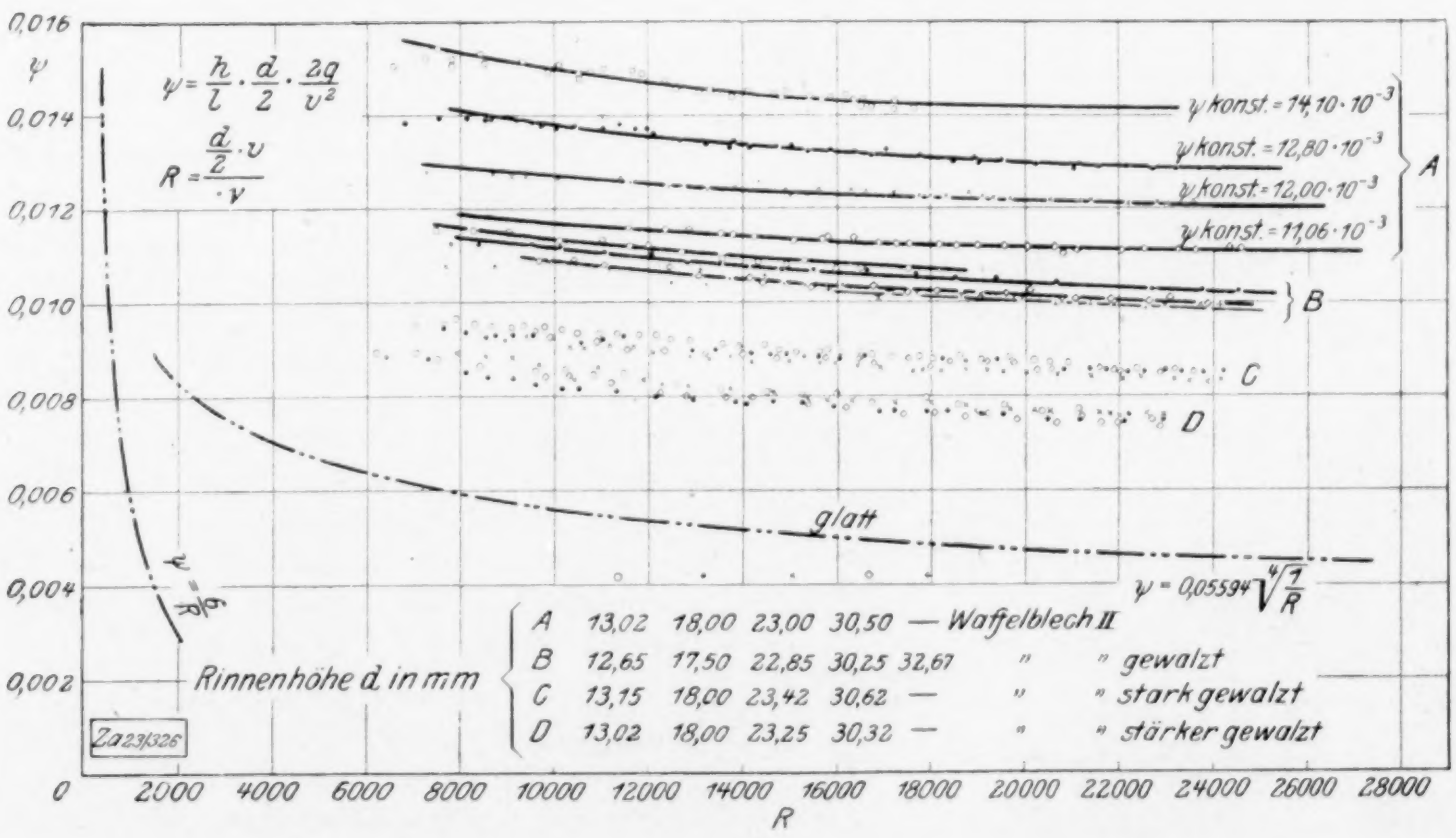


Abb. 23

III. Erörterung der Versuchsergebnisse.

10. Der Einfluß der relativen Rauhigkeit. Beschränken wir uns auf die turbulente Strömung, so haben wir drei typische Fälle für den Verlauf der ψ-Kurven zu unterscheiden.

1. Kurvenscharen, bei welchen nach dem Uebergangsgebiet ψ unmittelbar konstant verläuft (Drahtnetz und Waffelblech I);
2. Kurvenscharen mit langsam abfallendem ψ bei zunehmendem R,
   a) mit Uebergang zu konstantem ψ (Waffelblech II A; genutetes Zinkblech, kleinerer Widerstand),
   b) ohne diesen Uebergang (Waffelblech II B, C und D);
3. Kurvenscharen mit zunehmendem ψ bei ansteigendem R,
   a) mit Uebergang zu konstantem ψ (Drahtnetz $d = 8{,}5$ mm),
   b) ohne diesen Uebergang (genutetes Zinkblech, größerer Widerstand).

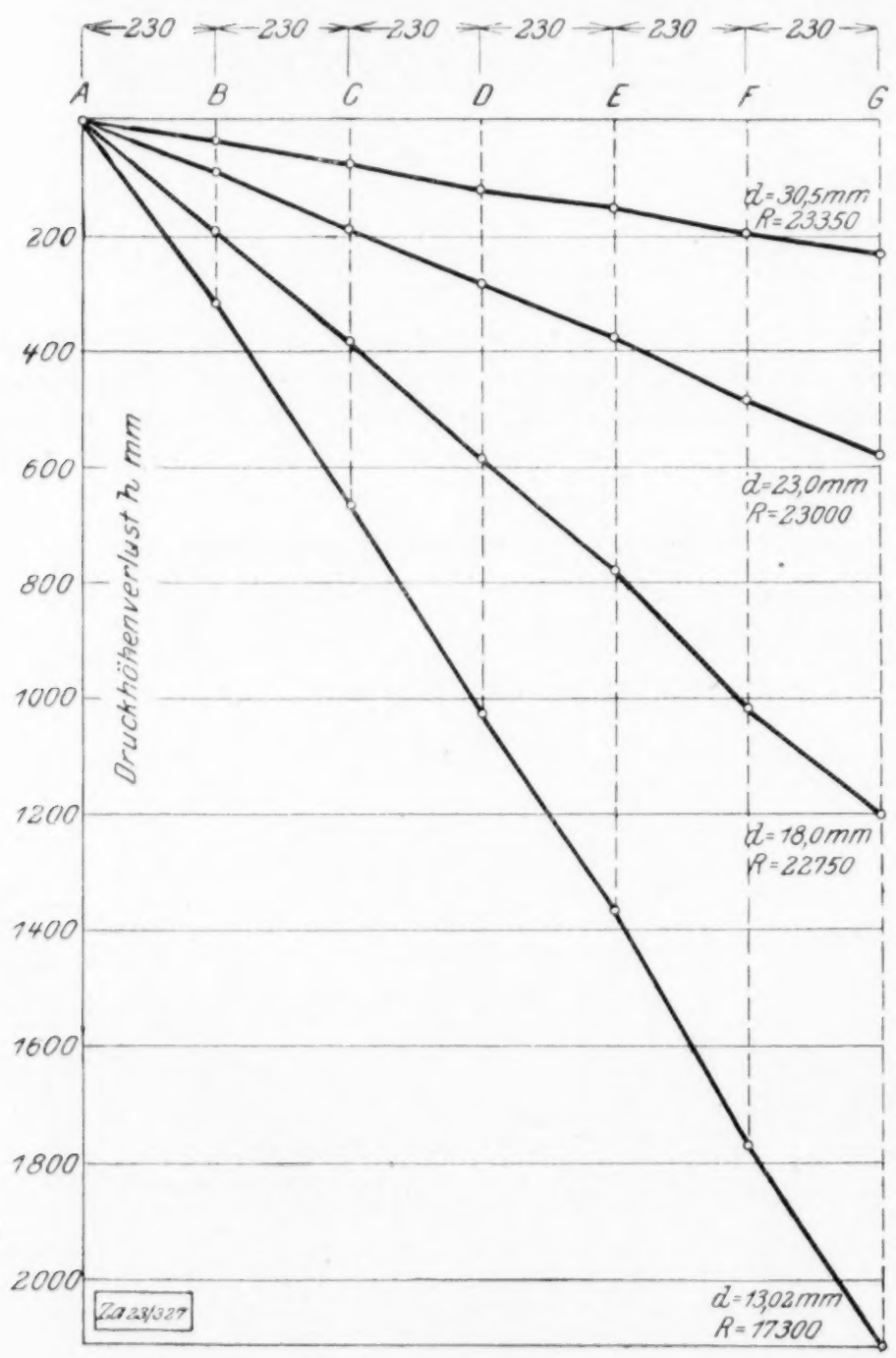


Abb. 24

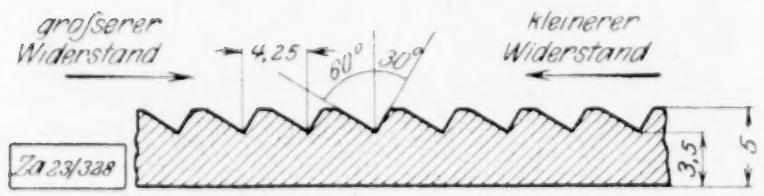


Abb. 25

Für Fall 2 b) und 3 b) müssen wir offen lassen, ob bei größerer Reynoldsscher Kennziffer ein konstanter Wert von ψ sich einstellt.

Als wichtigstes Ergebnis kommen die Messungen in Betracht, bei denen der Druckverlust dem quadratischen Widerstandsgesetz unterliegt, bei denen also ψ im Verlauf der in Abhängigkeit von R aufgezeichneten Kurven einen konstanten Wert erreicht und mit zunehmendem R konstant bleibt. Die $\psi_{\text{konst.}}$-Werte sind, wie bereits erwähnt, in logarithmischem Maßstab in Abb. 29 in Abhängigkeit von der Rinnenhöhe d für jedes Rauhigkeitselement, bei dem eine quadratische Widerstandsströmung erreicht wurde, aufgezeichnet. Für jedes der verschiedenen Rauhigkeitselemente, die jetzt in anderer Reihenfolge bezeichnet sind:

I. Drahtnetz,
II. Waffelblech II,
III. Waffelblech I,
IV. genutetes Zinkblech (kleinerer Widerstand),

ordnen sich, wie schon erwähnt, die $\psi_{\text{konst.}}$-Werte in Abhängigkeit von d zu Geraden, die innerhalb der Grenzen der Versuchsgenauigkeit mit der Steigung $n = -0{,}314$ parallel verlaufen.

Wir sehen also hier die vom Aehnlichkeitsgesetz gestellte Bedingung der einparametrigen Kurvenschar erfüllt, indem jede Versuchsreihe durch ein Potenzgesetz

$$\psi_{\text{konst.}} = \text{konst.}\, d^{-0{,}314} \quad . \quad . \quad (9)$$

dargestellt wird. Der Proportionalitätsfaktor selbst ist eine Funktion des Parameters, der die Rauhigkeit kennzeichnet und den wir mit k bezeichnen wollen. Denken wir uns k als Länge und be-

ziehen diese auf den doppelten Profilradius des Strömungsquerschnittes, also auf d, so kann man Gl. (9) für die Rauhigkeitselemente I bis IV ansetzen in der Form:

$$\psi_{\text{konst.}} = \psi_0 \left(\frac{k_{1\cdots4}}{d}\right)^{0,314} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Setzen wir willkürlich $k_1 = 1$ mm, so liefern die Ordinatenabstände der zweiten, dritten und vierten Geraden von der ersten das 0,314fache des Logarithmus von k_2, k_3, k_4. Die Berechnung aus Abb. 29 ergibt

$k_1 = 1$ mm, $k_2 = 1{,}48$ mm, $k_3 = 3{,}02$ mm, $k_4 = 12{,}30$ mm

und überdies die Höhenlage der ersten Geraden $\psi_0 = 0{,}0281$. Somit wird, wenn wir jetzt einfach ψ für $\psi_{\text{konst.}}$ schreiben:

$$\psi = 0{,}0281 \frac{k^{0,314}}{d^{0,314}} \quad (11)$$

und der Druckhöhenverlust

$$\frac{h}{l} = 0{,}0562\, k^{0,314} \frac{1}{d^{1,314}} \frac{v^2}{2g} \quad (12).$$

Führt man jetzt wieder den Profilradius $r = \frac{d}{2}$ ein, so geht Gl. (11) und (12) über in

$$\psi = 0{,}0226 \frac{k^{0,314}}{r^{0,314}} \quad (13),$$

$$\frac{h}{l} = 0{,}0226 \frac{k^{0,314}}{r^{1,314}} \frac{v^2}{2g} \quad (14),$$

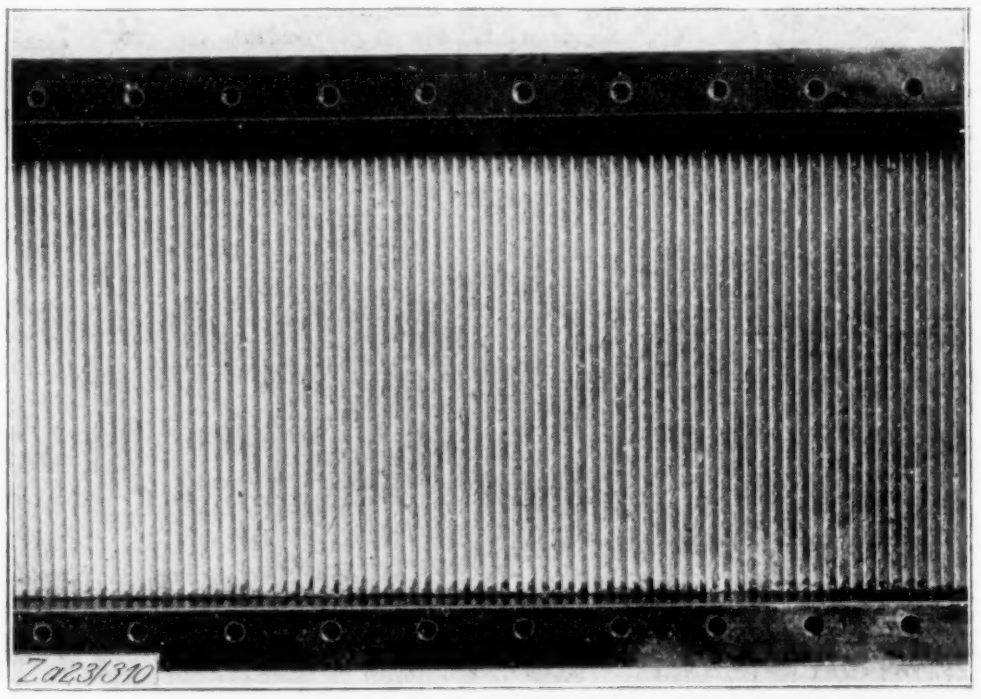


Abb. 26

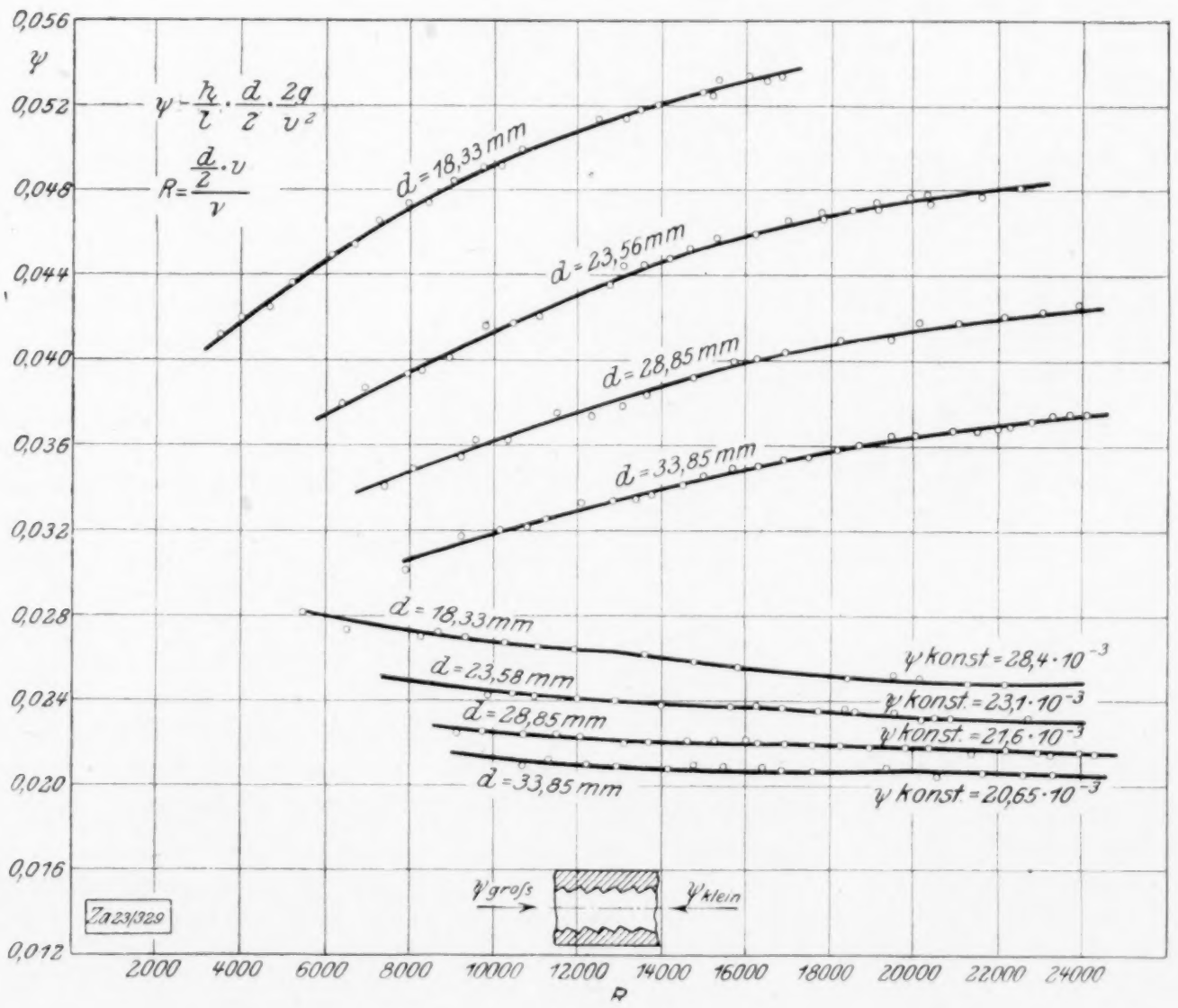


Abb. 27

wofür wir auch mit $K = k : r$ schreiben:

$$\frac{h}{l} = 0{,}0226\, K^{0{,}314}\, \frac{1}{r}\, \frac{v^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Ist die relative Rauhigkeit K eines bestimmten Rauhigkeitselementes bekannt, so können wir mit Hilfe von Gl. (15) den Druckverlust für eine Strömung, von der wir annehmen, daß sie dem quadratischen Widerstandsgesetz unterliegt, im Voraus bestimmen und dem technischen Zweck entsprechend die Rohrleitung dimensionieren. Zweckmäßiger wird man indes den Rauhigkeitsparameter k beibehalten und sich zur Berechnung von Rohrleitungen der Gl. (14) bedienen. Hat man ein Rauhigkeitselement (z. B. Betonwand, verrostetes Eisen o. dergl.), so wird man, solange man für diese Rauhigkeitselemente k noch nicht im Modellversuch ermittelt hat, an Hand meiner Kurven von Rauhigkeitselementen, deren k ermittelt wurde und an Hand folgender Zahlentafel, in der die Abmessungen der Rauhigkeitselemente eingetragen sind, k abschätzen.

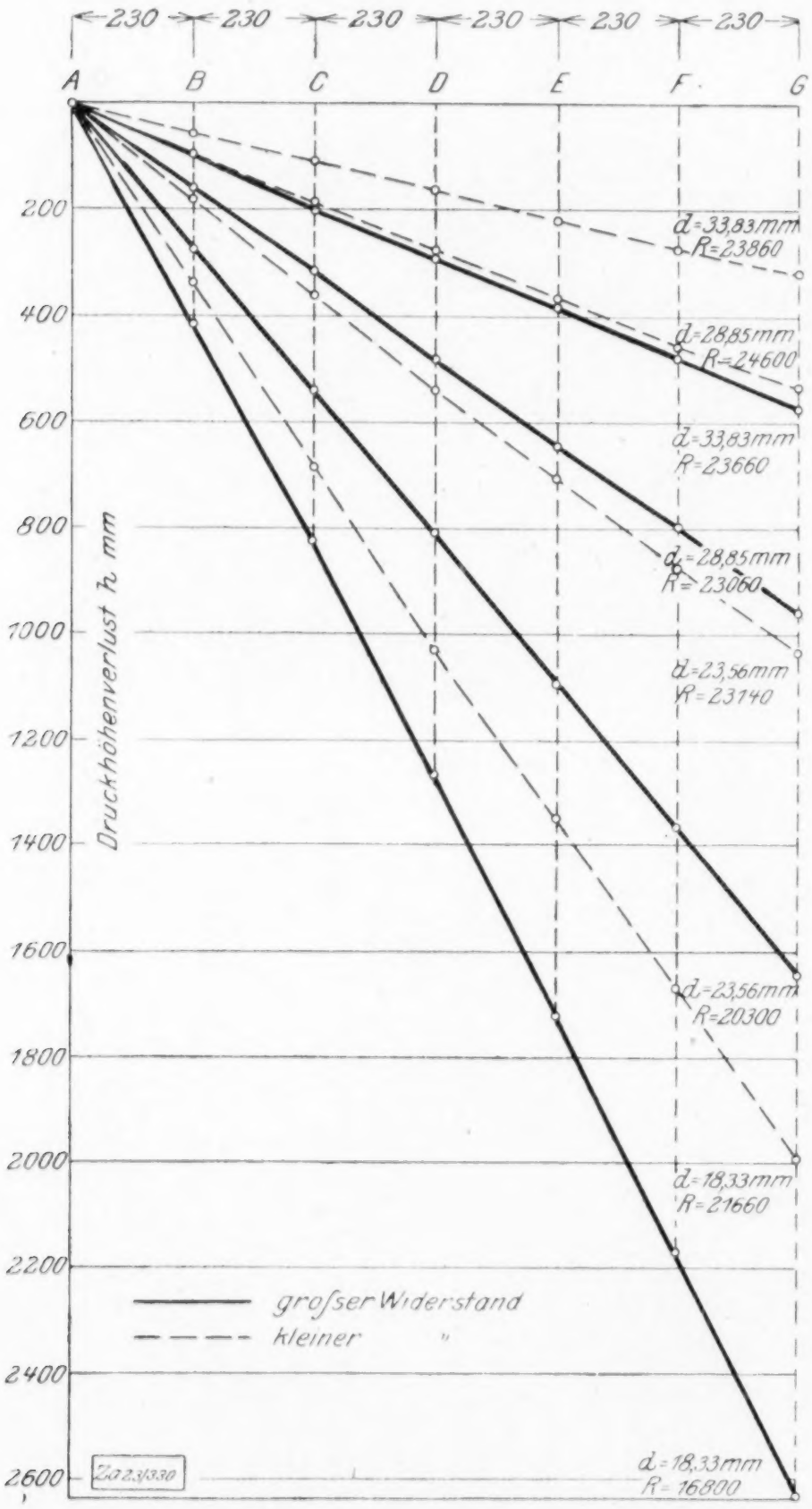


Abb. 28

Drahtnetz	Waffelblech II	Waffelblech I	Genutetes Blech (Sägeprofil)
I	II	III	IV
$k = 1{,}00$	1,48	3,02	12,30 mm
$\varepsilon = 0{,}115$	0,429	0,427	0,750 »
$\lambda = 1{,}600$	6,620	3,580	4,250 »
$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 1 : 14$	1 : 15	1 : 12	1 : 5,7

Aus der Zahlentafel erkennt man, daß k weder von dem Maß der Erhebung der Rauhigkeit allein, noch von der Zahl der Erhebungen pro Längeneinheit allein, noch von dem Verhältnis dieser Größen allein abhängig ist. Außer diesen Größen spielt die geometrische Form der Rauhigkeit eine Hauptrolle, wie diese auch für den Wert der Reynoldsschen Zahl maßgebend ist, oberhalb welcher die Strömung dem quadratischen Widerstandsgesetz unterliegt. Man erkennt das vor allem bei der Untersuchung des Sägeprofils, bei dem sich in Abhängigkeit von der Strömungsrichtung Widerstandskoeffizienten ergaben, die sich annähernd wie 2 : 1 verhielten.

Das für rauhe Rohre von mir gewonnene Gesetz steht in einer interessanten Beziehung zu dem Gesetz, welches für glatte Rohre gilt. Die aus meinen Ergebnissen interpolierte Formel für glatte Rohre kann geschrieben werden:

$$\frac{h}{l} = \text{konst.} \left(\frac{\nu}{v\, r}\right)^{0{,}27} \frac{1}{r}\, \frac{v^2}{2g} = \text{konst.}\, \frac{\nu^{0{,}27}\, v^{1{,}73}}{r^{1{,}27}}.$$

Die Exponenten von v und r stimmen, wie schon oben erwähnt, gut mit den von Reynolds angegebenen $n = 1{,}723$, $\beta = 1{,}269$ überein. Für rauhe Rohre erhielt ich das Potenzgesetz

$$\frac{h}{l} = \text{konst.} \frac{k^{0{,}314}}{r^{1{,}314}} \frac{v^2}{2g}.$$

Nun kann man die beiden Formeln nach einem von v. Kármán angegebenen Gedanken miteinander folgendermaßen verbinden: Setzt man zunächst bei der glatten Rinne den Druckhöhenverlust h proportional v^n, die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von y, der Entfernung von der Begrenzungswand, v proportional $y^\varkappa$, so gilt die Beziehung

$$\frac{1+\varkappa}{2} = \frac{1}{n}.$$

Bestehen für die glatte Rinne diese Beziehungen, so zeigt v. Kármán, daß für die rauhe Rinne ψ proportional $d^{-2\varkappa}$ sein muß.

Meine Versuche ergaben $2\varkappa = 0{,}314$, $\varkappa = 0{,}157$. Hieraus folgt $n = \frac{2}{1{,}157} = 1{,}73$, ein Wert, der mit dem für die glatte Rinne experimentell ermittelten genau übereinstimmt. Nach diesen Ergebnissen würde die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand sich proportional zu $y^{\frac{1{,}1}{7}}$ ergeben statt zu $y^{1/7}$, wie Prandtl und v. Kármán auf Grund des Blasiusschen Exponenten 1,75 abgeleitet haben.

11. Vergleich mit älteren Ergebnissen. Ueber den Druckhöhenverlust in rauhen Rohren sind Versuche von zahlreichen Forschern angestellt worden, von denen insbesondere Reynolds, Darcy, Bazin, Saph-Schoder, Weisbach, Lang erwähnt werden mögen. Biel[1]) hat das bis 1907 veröffentlichte Versuchsmaterial geordnet und für den Druckverlust folgende dem Aehnlichkeitsgesetz nicht genügende Formel angegeben:

$$\frac{h}{l} = \frac{v^2}{r}\left(a + \frac{f}{\sqrt{r}} + g\,\frac{b}{v\sqrt{r}}\,v\right) = K\frac{v^2}{r}.$$

Hierin bedeuten a eine absolute Konstante gleich 0,12, b und f Koeffizienten, die nur vom Rauhigkeitsgrad abhängig sind; K ist unser ψ mal $1000 : 2g = 50{,}8$, da Biel v und r in m rechnet. Nach Rohrmaterial und Wandbeschaffenheit unterscheidet Biel fünf Rauhigkeitsgrade I bis V und ermittelt demgemäß für die Größen f und b aus dem vorhandenen Versuchsmaterial fünf Wertepaare. In seiner Abb. 17 ist für Kreisrohre K in Abhängigkeit vom Durchmesser d für sehr große Geschwindigkeit nach der Formel aufgetragen. Diese Kurven K als Funktion von d für $v = \infty$ habe ich Biel entnommen und in Abb. 31 in logarithmischem Maßstab in Abhängigkeit vom halben Durchmesser des Kreisrohres, welcher der Rinnenhöhe $d = 2r$ entspricht, eingetragen. Die strichpunktierten Kurven, die ich mit a, b, c und d, den Bielschen Rauhigkeitsgraden I, II, III und IV entsprechend, bezeichnet habe, zeigen wenigstens bei b, c und d im Bereich meiner Messungen geradlinigen Verlauf und die gleiche Steigung von ungefähr $n = -0{,}314$. Der Bielsche Rauhigkeitsgrad I dürfte annähernd der glatten Rinne entsprechen. Für die Geraden, die den Rauhigkeitsgraden II, III und IV zugeordnet sind, habe ich k errechnet und gefunden:

für den Bielschen Rauhigkeitsgrad	II	III	IV
meine Rauhigkeitszahl k in mm	0,136	0,61	1,25.

Dabei entspricht nach Biel:

II Eisenblech mit Asphaltüberzug (Darcy), Gußeisen asphaltiert (Lang),
III Schmiedeeisen (Darcy), Verzinktes Eisenrohr (Saph-Schoder), Gußeisen neu (Darcy),
IV Gußeisen gebraucht und verkrustet (Darcy), Rauhe Bretter (Bazin), Wellblech.

Es sei bemerkt, daß die Bielsche Formel für kleinere Geschwindigkeiten keine richtigen Resultate liefern kann, weil das dritte Glied in der Klammer dem Aehnlichkeitsgesetz widerspricht. Für $v = \infty$ fällt dieses Glied weg.

[1]) Biel: Ueber den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Mitteil. üb. Forschungsarb. 1907, Heft 44.

Fritzsche[1]) hat das bis 1908 vorliegende Material über Strömung von Gasen in zylindrischen Rohrleitungen gesammelt und durch eigene Versuche ergänzt. Er bezieht den Druckverlust auf den Durchmesser d und setzt ihn in der Form an:

$$-\frac{dP}{dl} = \frac{\zeta}{d^{\beta}} \gamma^m v^n .$$

Dabei fand sich

$$\zeta = 9{,}38 \cdot 10^{-4}, \quad \beta = 1{,}269, \qquad n = 1{,}852, \quad m = 0{,}852.$$

Fritzsche meint hierzu, daß n, m und β für zylindrische Leitungen aller Art den Charakter von Konstanten haben, dagegen die Größe der Widerstandszahl ζ abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit der Rohrwandungen sei. Bestimmte Zahlenangaben nach diesen Richtungen könne er nicht machen, da das Material nicht ausreiche. Der oben angeführte Wert von ζ könne als Mittelwert gelten, dessen Veränderlichkeit er unter Ausschluß außergewöhnlich glatter und rauher Rohre auf etwa $\pm$ 10 vH schätze. Auf Grund meiner Messungen erscheint es so, daß Fritzsche nur bei Rauhigkeiten und bei Reynoldsschen Zahlen gearbeitet hat, bei welchen das quadratische Gesetz noch nicht erfüllt ist. Wie aber aus meinen Messungen erhellt, haben wir sowohl bei wachsender Rauhigkeit als auch bei zunehmender Kennziffer einen allmählichen Uebergang zum quadratischen Gesetz, so daß es wenig sinnreich erscheint, einen Mittelwert für die Exponenten zu bilden.

Ombeck[2]), dessen Versuche sich unmittelbar an die von Fritzsche anlehnen, versuchte die Meßpunkte in eine Kurvenschar einzuordnen mit Hilfe der Interpolationsformel

$$\lambda = 0{,}129 \left(\frac{v\,d}{\nu}\right)^{-x}.$$

Der Exponent ist gegeben durch $\frac{1}{x} = a + \frac{B\,\varepsilon}{d}$, worin bedeutet: a eine Grundzahl von der Größe 4,2, $B\,\varepsilon$ eine Rauhigkeitszahl, die Ombeck auf Grund seiner Versuche und an Hand der Bielschen Rauhigkeitsgrade zu ermitteln trachtet.

In Abb. 30 habe ich in logarithmischem Maßstabe in Abhängigkeit von R auf Grund meiner Versuche ψ-Kurven eingetragen, die annähernd gleichen Rinnenhöhen entsprechen, und deren ψ mit zunehmendem R langsam abfällt. Qualitativ stimmen diese Kurven, die in logarithmischem Maßstabe Geraden sind, mit den Kurven von Ombeck überein, das heißt: es läßt sich mein Versuchsmaterial, soweit sich nicht ψ = konst. ergibt, durch einen Ansatz $\psi \sim R^{\alpha}$ darstellen, wobei α mit zunehmender Rauhigkeit kleiner wird. Auf Grund meiner Versuche jedoch ist es zweifellos, daß man bei Variation der Rauhigkeitselemente zu Kurven gelangt, welche sich überschneiden, so daß eine einfache Zuordnung in der Ombeckschen Weise viel zu speziell erscheint.

Die einzige Widerstandsformel, die einerseits dem Aehnlichkeitsgesetz genügt und andererseits das ganze bis 1914 bekannte Versuchsmaterial berücksichtigt, ist die von R. v. Mises gegebene[3]). Sie lautet in unserer Bezeichnungsweise

$$\psi = 0{,}0024 + \sqrt{\frac{k'}{2r}} + \frac{0{,}3}{\sqrt{2R}},$$

(r hydraulischer Radius, R auf den hydraulischen Radius bezogene Reynoldssche Zahl) wenn von dem Gebiet in unmittelbarer Nähe der kritischen Geschwindigkeit abgesehen wird. Dabei bedeutet k' eine Rauhigkeitsziffer, die nach v. Mises den mittleren Erhebungen der Wandunebenheiten proportional sein soll. Er gibt eine Zahlentafel für die Werte von k', das für die glattesten Wände wie Glas, gezogenes Messing usf., weniger als 10^{-6} cm beträgt, für genietete Blechrohrleitung, rauhe Bretter oder gewöhnliches Mauerwerk auf $500 \cdot 10^{-6}$ cm ansteigt. Von den Potenzformeln wie der Blasiusschen und vielen andern üblichen Formeln unterscheidet sich die v. Misessche dadurch, daß sie für große Werte von R einen endlichen Grenzwert für die Widerstandszahl liefert. In diesem Punkte, in dem sie durch meine Versuche bestätigt wird, stimmt die Formel mit der von Biel überein, nach der jedoch der Abfall zum konstanten ψ langsamer erfolgt. Ein weiterer Unterschied gegenüber der Bielschen Formel liegt, abgesehen davon, daß dem Aehnlichkeitsgesetz Rechnung getragen ist, darin, daß die Rauhigkeitszahl k'

[1]) Fritzsche, Untersuchungen über den Strömungswiderstand der Gase in geraden zylindr. Rohrleitungen. Mitt. üb. Forschungsarb. 1908, Heft 60.

[2]) Ombeck, Druckverlust strömender Luft in geraden zylindr. Rohrleitungen. Mitt. üb. Forschungsarb. 1914, Heft 158.

[3]) R. v. Mises, Elemente d. techn. Hydromechanik, Leipzig 1914, S. 62 bis 64.

als stetige Veränderliche angesehen wird, während Biel das ganze Versuchsmaterial, wie oben dargelegt, in fünf diskrete Gruppen ordnet.

Um einen Vergleich zwischen meinen Versuchsergebnissen und der Misesschen Formel zu ermöglichen, habe ich zunächst in Abb. 29 zu den mit I bis IV bezeichneten Geraden, die die Versuchsergebnisse darstellen, vier gestrichelte Linien eingezeichnet, die der Misesschen Formel für $v = \infty$ bei passend gewähltem k' entsprechen. Die Werte von k' und von $\varrho = k' : d$ sind den einzelnen Linien beigesetzt. Aus den Abweichungen zwischen den ausgezogenen und den gestrichelten Linien, die die Genauigkeitsgrenzen der Messungen bzw. der Interpolation nicht stark überschreiten, erkennt man, daß die Misessche Formel sich der von mir gefundenen Gesetzmäßigkeit gut anpaßt. Die k'-Werte, die sich für die vier Versuchslinien ergeben, liegen zwischen 70 und $520 \cdot 10^{-6}$ cm. Nach den Angaben der Misesschen Zahlentafel ist 70 etwa der Wert für gewöhnliche Holzwände, 520 etwa der Wert für gewöhnliches Mauerwerk.

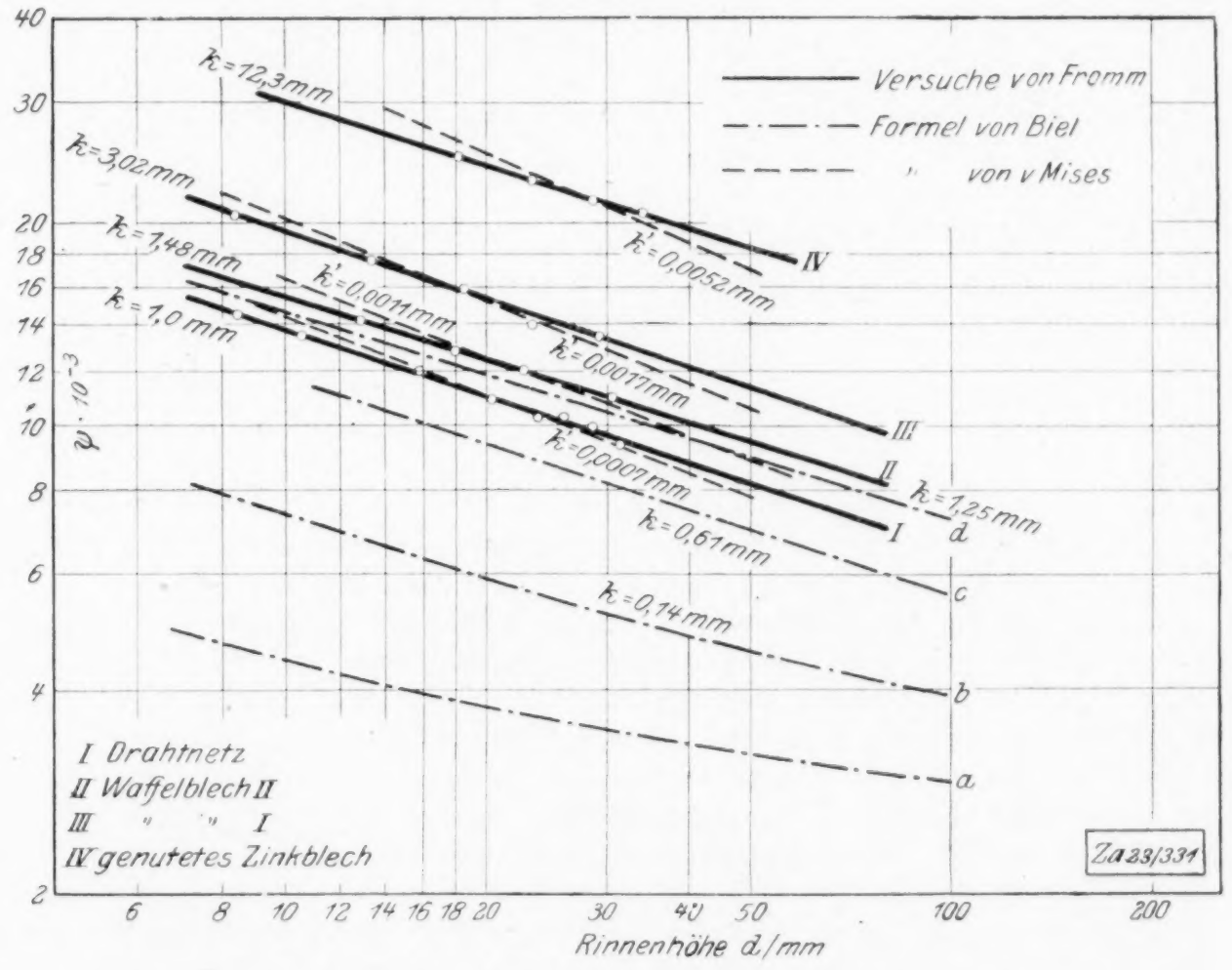


Abb. 29

Auch in Abb. 30, welche die Abhängigkeit der Widerstandszahl von der Reynoldsschen Kennziffer darstellt, ist eine Uebereinstimmung zwischen den Versuchsergebnissen und den Angaben der Misesschen Formel erkennbar. Hier sind drei strichpunktierte Linien, die der Formel bei geeigneten Werten der Rauhigkeitszahlen entsprechen, eingezeichnet; insbesondere schließen sich die beiden höher gelegenen für $k' = 70$ bezw. $850 \cdot 10^{-6}$ cm gut an die betreffenden Versuchsergebnisse an. Es muß dahingestellt bleiben, wie weit die k'-Werte, die zur Anpassung der Formel an die Versuchsergebnisse gewählt werden mußten, untereinander und mit den Angaben der Misesschen Zahlentafel in Einklang stehen.

IV. Zusammenfassung.

Nach meinen Versuchen zeigt der Stand des Problems etwa das folgende Bild:

a) Bei mittleren Rauhigkeiten gilt eine von der Reynoldsschen Zahl unabhängige Widerstandszahl ψ, die nur von der relativen Rauhigkeit abhängt und nach der Potenzformel (11) gerechnet werden kann. Die Ueberprüfung der Formel für Kreisrohre wäre erwünscht. Besonders wichtig wäre die Ermittlung der Abhängigkeit des Rauhigkeitsmaßes k von den Abmessungen und der geometrischen Form des Rauhigkeitselementes. Auch nach diesem Gesichtspunkte sollen die Versuche weiter ausgedehnt werden.

b) Bei geringeren Rauhigkeiten haben wir im allgemeinen eine Abnahme von ψ mit wachsendem R. Leider gestattete es mir die Versuchseinrichtung nicht, die Rey-

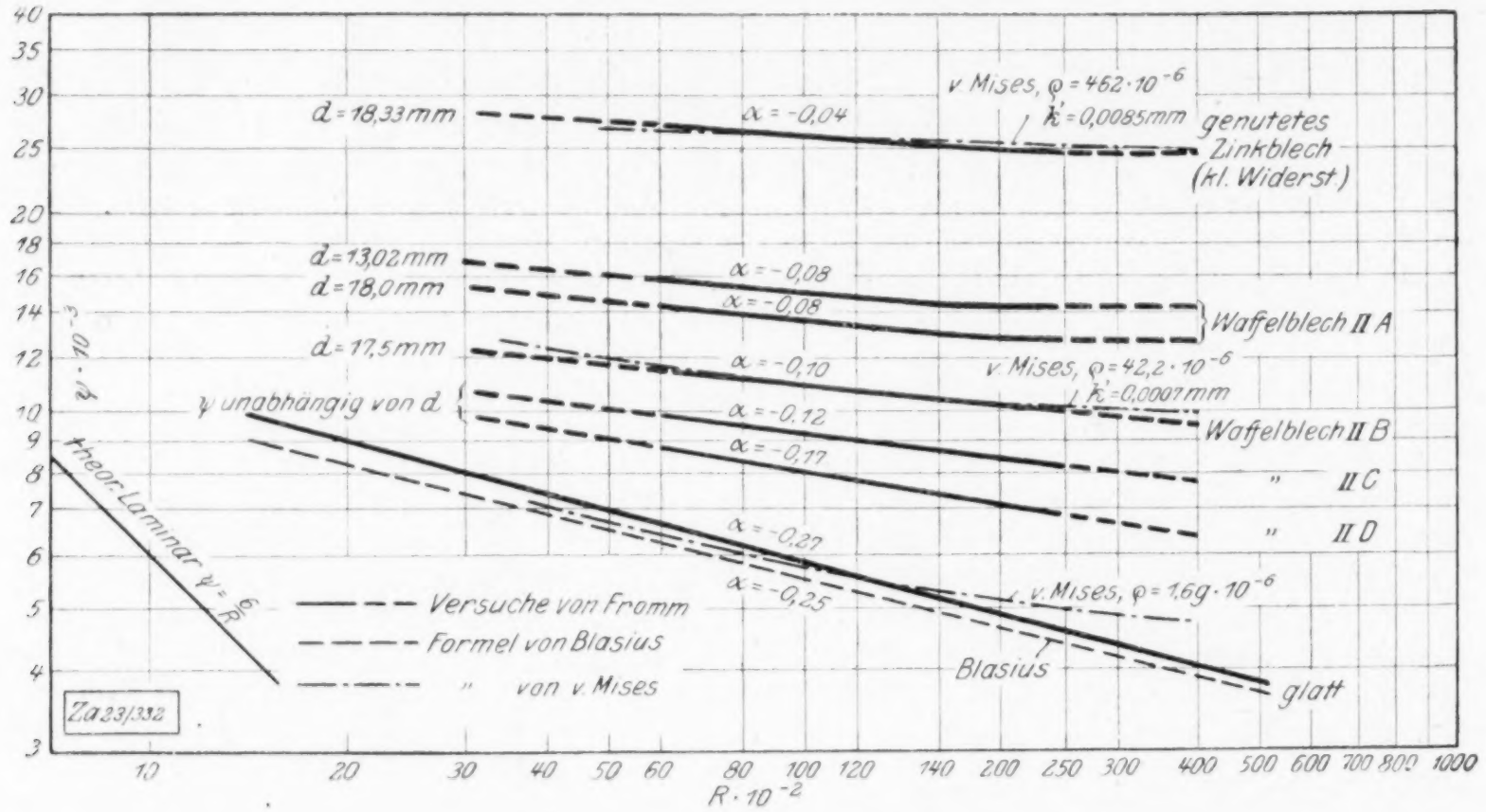


Abb. 30

noldssche Zahl derart zu steigern, daß ich für alle Rauhigkeitselemente den Bereich des quadratischen Gesetzes erreicht hätte. Ein Ausbau der Versuchseinrichtung nach diesem Gesichtspunkt würde sehr lohnen, insbesondere um zu prüfen, ob der konstante ψ-Wert überhaupt erreicht wird. Eine weitere Aufgabe ist es festzustellen, von welchen Faktoren die Grenze bedingt ist, bei welcher das quadratische Widerstandsgesetz sich einstellt, ferner, von welchen Faktoren der Verlauf bis zum konstanten ψ abhängt.

c) Bei ganz großen Rauhigkeiten habe ich zunächst eine Zunahme von ψ mit der Kennziffer beobachtet. Es wäre hier auch zu untersuchen, ob bei Zunahme der Reynoldsschen Zahl sich ψ einem konstanten Wert nähert. Diese außergewöhnlichen Rauhigkeiten liegen zwar außerhalb des normalen Bereiches der technischen Anwendungen, für die Ergänzung des Gesamtbildes wäre eine weitere Erforschung immerhin lohnend.

d) In dem sogenannten Uebergangsgebiet ($R = 500 - 8000$) habe ich Anomalien beobachtet, welche bisher unaufgeklärt sind, insbesondere starke Zunahme von ψ bei abnehmender Kennziffer bei gewissen Rauhigkeitselementen (z. B. Drahtnetz, Waffelblech I). Eine Klärung dieser Anomalien, welche auf Anlauferscheinungen nicht zurückgeführt werden können, wäre ebenfalls eine wichtige Aufgabe weiterer Versuche.

Das ausführliche Zahlenmaterial, welches den Abbildungen zugrunde liegt, kann hier wegen Raummangels nicht veröffentlicht werden. Es findet sich in den Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen, III. Lieferung.

Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Mittellinie.

Von **S. TIMOSCHENKO** in Pittsburg (Pens.).

Zur Auflösung dieses Problems wenden wir die bekannten Differentialgleichungen des Gleichgewichtes eines vom Hause aus krummen Stabes[1]) an. Im Falle eines Stabes, der längs seiner kreisförmigen Mittellinie durch eine gleichmäßig verteilte, auf den Mittelpunkt gerichtete Belastung zusammengedrückt wird (Abb. 1), bekommen diese Gleichungen besonders einfache Form. Die Auflösung der Gleichungen gibt uns den Wert der gesuchten Kipplast[2]).

[1]) Siehe A. E. H. Love, Theory of Elasticity, third edition (1920), p. 403 und 453.

[2]) Die Lösung der Aufgabe über die Kippsicherheit eines Stabes mit kreisförmiger Mittellinie im Falle der reinen Biegung gab ich in Berichte des Polytechnischen Instituts in Kieff (1910). Einige Probleme über die Kipperscheinungen in gekrümmten Stäben wurden von Prof. E. Nicolai behandelt. Leider kann ich hier auf diese russisch publizierte Arbeit nicht näher eingehen.

1. Aufstellung der Differentialgleichung. Die Verschiebungen in den Richtungen der beweglichen Achsen (x, y, z) (Abb. 2) bezeichnen wir mit u, v, w, den Verdrehungswinkel mit β. Dann erhalten wir für die Biegungsmomente G, G_1 und für das Drehmoment H die bekannten Ausdrücke:

$$G = \frac{B}{a^2}\left(a\beta - \frac{d^2v}{d\Theta^2}\right), \quad G_1 = \frac{B_1}{a^2}\left(\frac{d^2u}{d\Theta^2} + \frac{dw}{d\Theta}\right), \quad H = \frac{C}{a^2}\left(\frac{dv}{d\Theta} + a\frac{d\beta}{d\Theta}\right) \quad . \quad (1),$$

wo B und B_1 die Hauptbiegungssteifigkeiten, C die Torsionssteifigkeit und a den Radius der Mittellinie bezeichnen.

Diese Ausdrücke in die Gleichgewichtsgleichungen[1])

$$\frac{dH}{d\Theta} - G = 0, \quad \frac{dG}{d\Theta} + H - qa\frac{dv}{d\Theta} = 0, \quad \frac{dG_1}{d\Theta} + qa\frac{du}{d\Theta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

eingesetzt, geben:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2v}{d\Theta^2}(1+\lambda) + a\frac{d^2\beta}{d\Theta^2} - \lambda a\beta = 0 \qquad -\frac{d^3v}{d\Theta^3} + \frac{dv}{d\Theta}\left(\frac{1}{\lambda} - \omega\right) + a\frac{d\beta}{d\Theta}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = 0 \\ &\qquad\qquad \frac{d^3u}{d\Theta^3} + \frac{d^2w}{d\Theta^2} + \frac{qa^3}{B_1}\frac{du}{d\Theta} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

wo

$$\lambda = \frac{B}{C}; \quad \omega = \frac{qa^3}{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

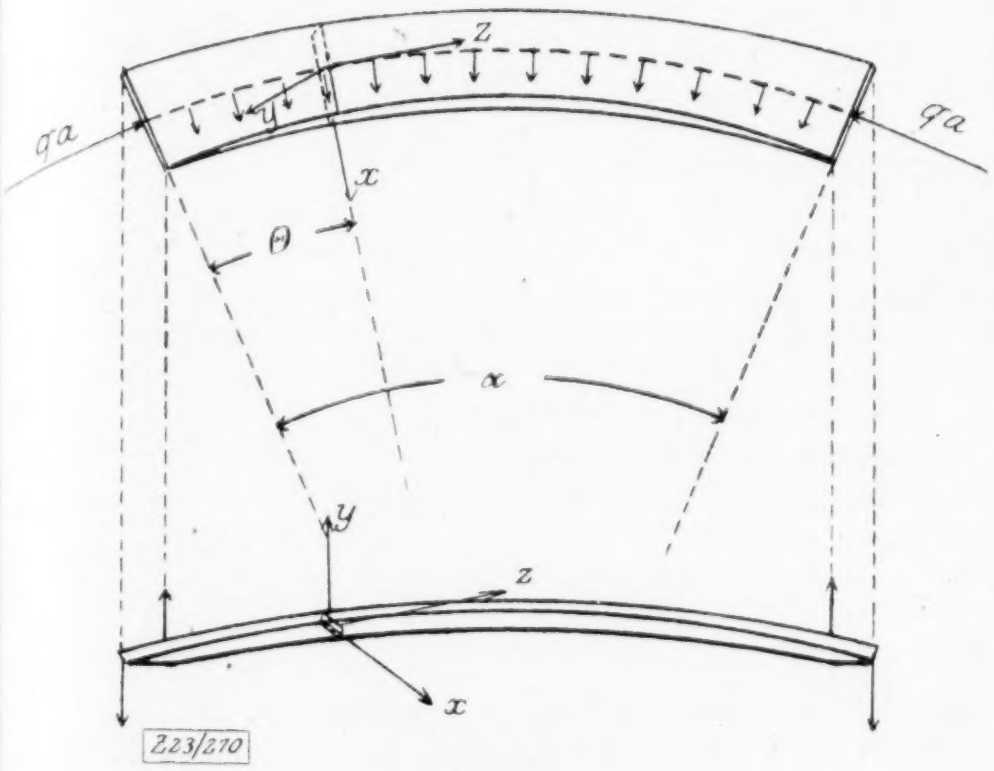


Abb. 1

Die dritte der Gleichungen (3) zusammen mit der Bedingung der Undehnbarkeit der Mittellinie

$$\frac{dw}{d\Theta} = u$$

gibt uns die bekannte kritische Last für die Knickung eines gekrümmten Stabes in der Ebene der Mittellinie[2]).

Die Bedingung für die Kippsicherheit des Stabes bekommen wir

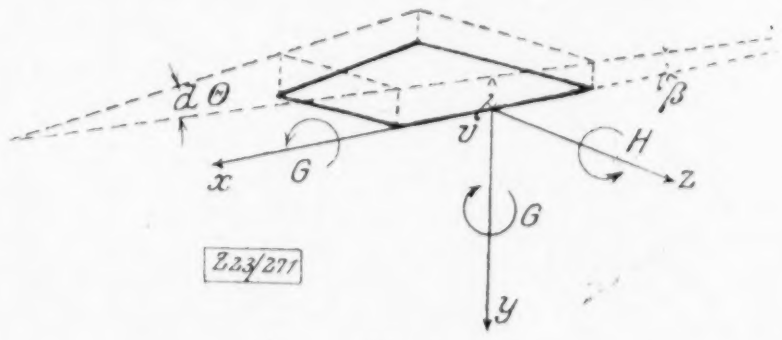


Abb. 2

aus den zwei ersten Gleichungen des Systemes (3). Eliminieren wir v, so erhalten wir für β folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^4\beta}{d\Theta^4} + (2+\omega)\frac{d^2\beta}{d\Theta^2} + (1 - \omega\lambda)\beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\beta = A\sin k\Theta + B\cos k\Theta + C\sinh k_1\Theta + D\cosh k_1\Theta \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

wo

$$k = \sqrt{\frac{2+\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega+2}{2}\right)^2 + \omega\lambda - 1}}; \quad k_1 = \sqrt{-\frac{2+\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{2+\omega}{2}\right)^2 + \omega\lambda - 1}}.$$

2. Fall freier Enden. Als einfachstes Beispiel betrachten wir den Fall, wo G und β an den Enden des Stabes gleich Null sind (Abb. 1). Diese Endbedingungen werden erfüllt, wenn wir in der Lösung (6) die Konstanten B, C, D gleich Null, und

$$k = \frac{\pi}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

setzen.

[1]) Wir nehmen an, daß die gleichmäßig verteilte Belastung q auch nach der Verzerrung parallel zu der Ebene der unverzerrten Mittellinie gerichtet ist.

[2]) Vgl. meine Arbeit, Berichte des Polytechnischen Instituts in Kieff, 1910.

Aus (7) erhalten wir

$$\omega = \frac{(\pi^2 - \alpha^2)^2}{\alpha^2 (\pi^2 + \lambda \alpha^2)} .$$

Der kritische Druck im Stabe ist

$$T_{kr} = q a = \frac{\omega B}{a^3} = \frac{B}{a^2} \frac{(\pi^2 - \alpha^2)^2}{\alpha^2 (\pi^2 + \lambda \alpha^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$T_{kr} = \frac{B}{a^2} \frac{9}{4 + \lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Diese Lösung entspricht der Achterbildung an geschlossenen Kreisringen, wenn die Kräfte q ihre Richtung bei der Kippung beibehalten. Den Fall, daß diese Kräfte bei der Kippung immer auf den Ringmittelpunkt gerichtet sind, wollen wir weiter unten betrachten.

Falls der Winkel α sehr klein ist, erhalten wir aus (8) die bekannte Eulersche Formel

$$T_{kr} = \frac{B \pi^2}{l^2} ,$$

wo $l = \alpha a$ die Länge des krummen Stabes bedeutet. Im Falle $\alpha = \pi$ gibt uns die Formel (8)

$$T_{kr} = 0,$$

was der Möglichkeit einer Drehung als starrer Körper um den Durchmesser des Halbkreises entspricht. Für $k = \frac{n \pi}{\alpha}$ bekommen wir die Gleichgewichtsformen höherer Ordnung mit n Halbwellen. Setzen wir $\alpha = m \pi$, so läßt sich der kritische Druck (8) so darstellen:

$$T_{kr} = \frac{B}{a^2} \frac{(n^2 - m^2)^2}{m^2 (\lambda m^2 + n^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8').$$

Der Uebergang von der Gleichgewichtsform mit einer Halbwelle zur Form mit zwei Halbwellen entspricht dem Falle

$$(T_{kr})_{n=1} = (T_{kr})_{n=2}$$

oder, nach (8),

$$\frac{(1 - m^2)^2}{\lambda m^2 + 1} = \frac{(4 - m^2)^2}{\lambda m^2 + 4} .$$

Das gibt uns

$$m = 1{,}48 \quad \text{und} \quad \alpha = 1{,}48 \, \pi.$$

D. h. bei

$$1{,}48 \, \pi < \alpha < 2 \, \pi$$

wird die erste ausgebeulte Gleichgewichtsform aus zwei Halbwellen bestehen.

Im Falle $\alpha = 2 \pi$ wird dieser Form $T_{kr} = 0$ entsprechen, d. h. daß sich der Kreisring um einen Durchmesser frei drehen kann.

Die erstentstandene ausgebeulte Form des geschlossenen Kreisringes wird aus vier Halbwellen bestehen.

3. Eingespannte Enden. Mit Hilfe der allgemeinen Lösung (6) können wir die Kippsicherheit auch bei anderen Endbedingungen untersuchen. Nehmen wir z. B. an, daß β und $\frac{\partial \beta}{\partial \Theta}$ an den Enden des Stabes gleich Null sind (eingespannte Enden), so erhalten wir aus (6) die folgende Gleichung zur Berechnung der Kipplast:

$$2 + \frac{k_1^2 - k^2}{k k_1} \sin k \alpha \sinh k_1 \alpha - 2 \cos k \alpha \cosh k_1 \alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Wird α sehr klein, können wir $k_1 \alpha$ als kleine Größe betrachten und k_1 gegen k vernachlässigen. Es läßt sich dann die Bedingungsgleichung (10) in folgender Form darstellen:

$$2 - k \alpha \sin k \alpha - 2 \cos k \alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch

$$k = \frac{2 \pi}{\alpha} .$$

Damit erhalten wir

$$\omega = \frac{(4 \pi^2 - \alpha^2)^2}{\alpha^2 (4 \pi^2 + \lambda \alpha^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

d. h. der kritische Druck im Stabe wird

$$T_{kr} = qa = \frac{B}{l^2}\,\frac{(4\pi^2 - \alpha^2)^2}{4\pi^2 + \lambda\alpha^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Dieses Resultat fällt an der Grenze ($\alpha = 0$) mit der Eulerschen Knicklast zusammen.

Für größere Werte von α haben wir einige Werte der Knicklast aus der Gl. (10) berechnet[1]). Die entsprechenden Werte von ω sind in folgender Zahlentafel gegeben:

$\alpha =$	$0{,}250\,\pi$	$0{,}500\,\pi$	$1{,}00\,\pi$	$1{,}063\,\pi$	$1{,}10\,\pi$	$1{,}24\,\pi$	$1{,}50\,\pi$	$2\,\pi$
$\omega =$	60,1	12,6	1,85	1,538	1,40	1,00	0,69	0,60

Nähert sich α der Größe $\frac{2\pi}{\sqrt{2 + \frac{1}{\lambda}}}$, so geht wieder die Gl. (10) in die Gl. (11) über und wir erhalten als Grenzwert $\omega = \frac{1}{\lambda}$. Die Resultate der Formel (12) mit den Zahlen der Zahlentafel vergleichend, können wir schließen, daß uns diese Näherungsformel gute Näherungswerte für ω auch bei größeren Werten des Winkels α gibt. Bei $\alpha = {}^1/_4\,\pi$ beträgt der Fehler 2,2 vH. Bei $\alpha = {}^1/_2\,\pi$ wird dies gleich 7,1 vH sein.

4. Ableitung aus der potentiellen Energie. Wie man die Kippsicherheit aus der Betrachtung der potentiellen Energie des Systems finden kann, wollen wir an dem einfachsten Beispiele, wo G und β an den Enden des Stabes gleich Null sind (Abb. 1), zeigen.

Im Fall einer ebenen Form des Gleichgewichtes wird die potentielle Energie des Stabes nur aus der Energie des Druckes bestehen. Nehmen wir jetzt die Ausbeulung des Stabes, so wird dadurch die potentielle Energie der Biegung und der Torsion erzeugt, aber in derselben Zeit wird die potentielle Energie des Druckes etwas vermindert. Wenn die potentielle Energie der Biegung V_B zusammen mit der Energie der Torsion V_T größer als die Verminderung V_D der potentiellen Energie des Druckes ausfällt, so ist die ebene Form des Gleichgewichtes des Stabes stabil. Im entgegengesetzten Fall ist diese Form labil. Die kritische Last können wir aus der Gleichung

$$V_B + V_T = V_D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

finden.

Nehmen wir

$$\beta = \gamma \sin\frac{\pi\Theta}{\alpha},$$

so gibt uns die erste der Gleichungen (3)

$$\frac{dv}{d\Theta} = -\gamma\,\frac{\alpha a}{\pi}\,\frac{\lambda + \frac{\pi^2}{\alpha^2}}{1 + \lambda}\cos\frac{\pi\Theta}{\alpha}.$$

Diese Werte von β und $\frac{dv}{d\Theta}$ in die Formeln (1) für die Momente eingesetzt, ergeben für die potentielle Energie folgende Ausdrücke:

$$V_B = \frac{1}{2B}\int_0^\alpha G^2 a\,d\Theta = \gamma^2\,\frac{\alpha B}{4a}\left(\frac{1 - \frac{\pi^2}{\alpha^2}}{1 + \lambda}\right)^2,$$

$$V_T = \frac{1}{2C}\int_0^\alpha H^2 a\,d\Theta = \gamma^2\,\frac{\alpha C}{4a}\left[\frac{a}{\pi}\,\frac{\lambda\left(1 - \frac{\pi^2}{\alpha^2}\right)}{1 + \lambda}\right]^2,$$

$$V_D = \frac{qa}{2}\int_0^\alpha \left(\frac{dv}{a\,d\Theta}\right)^2 a\,d\Theta = \gamma^2\,\frac{q a^2 a^3}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda + \frac{\pi^2}{\alpha^2}}{1 + \lambda}\right)^2.$$

---

[1]) Bei der Berechnung haben wir die Poissonsche Zahl $\sigma = 0{,}3$ und $\lambda = 0{,}65$ genommen, was einem schmalen rechteckigen Querschnitt des Stabes entspricht.

Diese Ausdrücke in die Gleichung (14) eingesetzt, geben für die kritische Last T_{kr} die frühere Formel (8).

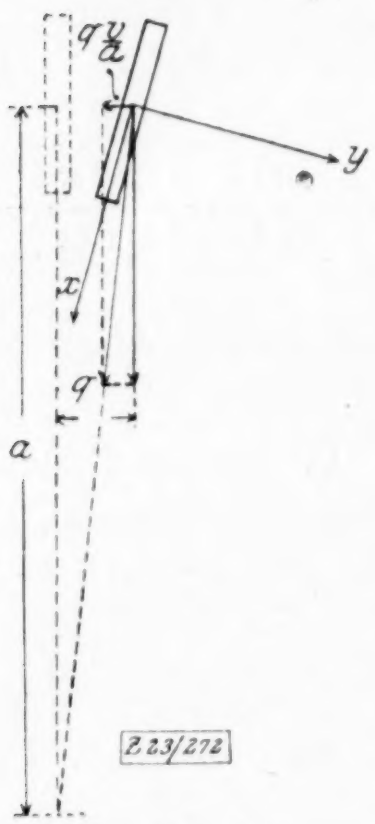


Abb. 3

5. Die Belastung dauernd nach dem Mittelpunkt gerichtet. Als zweites Beispiel wollen wir den Fall betrachten, daß die Kräfte q bei der Ausbeulung immer auf den Ringmittelpunkt zu gerichtet sind (Abb. 3). Bei Aufstellung der Gleichung für die Berechnung der Kipplast müssen wir jetzt auch die Arbeit der Komponenten der äußeren Kräfte q in der Richtung der Verschiebung v in Betracht ziehen. Diese Arbeit wird gleich

$$A = -\int_0^{\alpha} a\,d\Theta \int_0^{v} \frac{q\,v}{a}\,d\,v = -\gamma^2\,\frac{q\,a^2}{2}\,\frac{a^4}{\pi^4}\,\frac{a}{2}\left(\frac{\lambda+\frac{\pi^2}{a^2}}{1+\lambda}\right)^2.$$

Die Gleichung für die Berechnung der kritischen Last wird:

$$V_B + V_T = V_B + A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir für $\alpha < \pi$

$$T_{kr} = q\,a = \frac{B\pi^2}{a^2}\,\frac{\pi^2 - a^2}{a^2\,(\lambda a^2+\pi^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gibt uns die Formel (16).

$$T_{kr} = \frac{B}{a^2}\,\frac{12}{\lambda+4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

was mit dem Resultate der Berechnungen von Hencky für einen geschlossenen Kreisring übereinstimmt [1]).

Agram, Mai 1922. 187

Über das Schicksal gemischter Populationen nach den Mendelschen Vererbungsgesetzen.

Von **HEINRICH TIETZE** in Erlangen.*)

Die Mendelschen Vererbungsgesetze liefern, wie bekannt, eine erfahrungsgemäß richtige Aussage über die Zahlenverhältnisse, in denen gewisse Merkmale der Lebewesen einer Generation sich in der nächsten Generation wiederfinden. Ein einfaches Beispiel soll zunächst in den Inhalt der Mendelschen Gesetze und die bei der Untersuchung auftretenden Begriffsbildungen einführen. Auf die den Zahlengesetzen zugrundeliegenden Vorgänge in den Keimzellen — einen Gegenstand neuerer biologischer Untersuchungen — braucht dabei nicht eingegangen zu werden.

Von der »Wunderblume« (Mirabilis jalapa) gibt es drei durch die Blütenfarbe unterschiedene Typen, einen mit roten, einen zweiten mit weißen, einen dritten mit blaßrosa Blüten. Wird der Stempel einer rotblühenden Blume mit Staub einer ebenfalls rotblühenden Blume befruchtet, so entstehen ausnahmslos rotblühende Nachkommen: der rotblühende Typus ist reinrassig (homozygot). Das gleiche gilt vom weißblühenden Typus; unter sich fortgepflanzt gibt er nur weißblühende Nachkommenschaft. Wenn der rote und der weiße Typus gekreuzt werden, so haben die Nachkommen durchwegs rosafarbige Blüten, wobei sich kein Unterschied ergibt, ob der Stempel einer roten Blume mit Staub von einer weißen befruchtet wurde oder umgekehrt. Der so durch Kreuzung entstandene rosafarbene heterozygote Typus (hybride Typus, Bastard-Typus) weist aber hinsichtlich der Vererbung seiner Eigenschaften ein ganz anderes Verhalten auf als der rote oder der weiße homozygote Typus. Wird der rosa Typus nur unter sich fortgepflanzt, so entstehen keineswegs nur rosablühende Nachkommen, sondern es sind unter den Nachkommen alle drei Typen vertreten; und zwar ist nach Mendel durchschnittlich die Hälfte der Nachkommen rosablühend, ein Viertel rot und ein Viertel weiß. Dabei

[1]) Siehe diese Zeitschr. 1, 1921, S. 451.

*) Vorgetragen in der Versammlung in Leipzig, September 1922.

zeigen die rotblühenden unter diesen Nachkommen von rosa Eltern keinen Unterschied gegenüber solchen roten Exemplaren, die nur von roten Eltern abstammen, und zwar nicht nur individuell, sondern auch in der Weitervererbung ihrer Eigenschaften. Werden z. B. solche rote Nachkommen von rosa Eltern nur unter sich gekreuzt, so entstehen ausnahmslos rote Nachkommen: davon, daß in der Ahnentafel dieser Exemplare der rosa (und damit der weiße) Typus vertreten ist, ist an ihnen selbst und an ihren Nachkommen jede Spur verschwunden. Ganz das gleiche gilt von den weißen Nachkommen von rosa Eltern: sie unterscheiden sich in ihren individuellen und in ihren Vererbungseigenschaften nicht von anderen Exemplaren des weißen Typus. Endlich zeigen die rosafarbigen unter den Nachkommen rosafarbiger Eltern in ihren Eigenschaften keinen Unterschied gegenüber ihren rosafarbigen Eltern; diese rosa Nachkommenschaft gibt unter sich gekreuzt wieder Nachkommen von allen drei Typen, und wieder im gleichen Zahlenverhältnis. Es ist also auch ausgeschlossen, durch fortgesetztes Kreuzen von nur rosa Exemplaren schließlich einen rosa Typus von den Eigenschaften eines reinrassigen Typus mit ausnahmslos rosablühender Nachkommenschaft zu gewinnen; stets wird etwa ein Viertel roter und ein Viertel weißer Nachkommen dabei sein.

Wird der rosa Bastardtypus mit einem der reinrassigen Typen, z. B. dem roten, gekreuzt, so sind die Nachkommen nicht etwa von einer mittleren (dunkelrosa) Färbung zwischen rot und rosa; sondern ein Teil der Nachkommen — nach dem Mendelschen Gesetz durchschnittlich die Hälfte — gehört dem roten, der andere Teil dem rosa Typus an; dabei gilt wieder, daß die auf solche Weise erzeugten roten bzw. rosa Exemplare sich von Exemplaren des gleichen Typus, die auf andere Weise entstanden sind, weder individuell noch in ihren Vererbungseigenschaften unterscheiden. Analog entstehen aus der Kreuzung des rosa mit dem weißen Typus Nachkommen, die entweder dem rosa oder dem weißen Typus angehören, und zwar wieder durchschnittlich zu gleichen Teilen. Es ist also nicht möglich, durch fortgesetzte Kreuzungen Zwischenstufen in der Färbung zwischen rot und rosa oder zwischen rosa und weiß zu gewinnen: es treten immer nur Nachkommen von einem der drei Typen auf. Die mitgeteilten Zahlenverhältnisse, nach denen sich jedesmal die Nachkommenschaft auf die einzelnen Typen verteilt, geben für unser Beispiel den Inhalt der Mendelschen Gesetze wieder, soweit er zur vorläufigen Erläuterung unseres Gegenstandes nötig ist. Die gleichen Verhältnisse hat man in zahlreichen anderen Fällen wiedergefunden. Sie treten dann auf, wenn hinsichtlich eines Merkmals (bei mirabilis jalapa war es die Blütenfarbe) zwei reinrassige Typen und ein — von ihnen äußerlich unterschiedener — Bastardtypus vorhanden sind. Wichtig ist aber auch der nicht seltene Fall, daß der Bastardtypus, das Kreuzungsprodukt der beiden reinrassigen Typen, äußerlich von einem der reinrassigen Typen nicht oder nur schwierig zu unterscheiden ist — sei es jederzeit, sei es wenigstens unter gewissen besonderen Lebensbedingungen. Es wäre z. B. denkbar, daß in einem Fall, analog dem der Wunderblume, der Bastardtypus nicht blaßrosa, sondern weiß blüht. Hier wird von Dominanz der weißen Blütenfarbe über die rote gesprochen. Grundsätzlich sind aber wieder drei Typen auseinander zu halten: der rote reinrassige, der weiße reinrassige und der weiße Bastardtypus. Denn wenn auch Exemplare der beiden letzteren Typen individuell nicht zu unterscheiden sind, so unterscheiden sie sich doch in ihren Vererbungs-Eigenschaften, so daß z. B. unter den Nachkommen weißer Bastarde stets auch rote Exemplare auftreten, unter den Nachkommen weißer reinrassiger Eltern niemals. Die Untersuchung der Nachkommen gestattet also stets die Unterscheidung der beiden weißen Typen. Man spricht in einem solchen Fall von 3 Biotypen (Typen, die sich, wenn nicht im Aussehen der Individuen, so doch in den Vererbungs-Eigenschaften unterscheiden) und von 2 Phänotypen (äußerlich individuell unterscheidbare Typen). Im übrigen gelten die Mendelschen Gesetze unverändert, nur daß eben bei statistischen Feststellungen die zum gleichen Phänotypus gehörigen Biotypen in einen Topf geworfen erscheinen. Z. B. ist bei Dominanz der weißen Farbe die Nachkommenschaft von Eltern, die beide dem weißen Bastardtypus angehören, zu einem Viertel rot und zu drei Vierteln weiß; unter den drei Vierteln weißen Nachkommen erscheinen nämlich vereinigt jene des weißen Bastardtypus (die Hälfte der ganzen Nachkommenschaft) und jene des weißen reinrassigen Typus (ein Viertel der Nachkommenschaft). Die ersten, von Gregor Mendel selbst ausgeführten, Kreuzungsversuche mit Erbsenrassen betrafen gerade solche Fälle von Dominanz mit dem Verhältnis $^1/_4 : {}^3/_4$ für die Nachkommenschaft des Bastardtypus.

Haben wir hiermit Fälle von »Monohybridismus« besprochen, wo die verschiedenen zur Kreuzung kommenden Typen nur bezüglich eines einzigen Merkmales,

wie der Blütenfarbe, unterschieden sind, so gelten analoge Gesetze bei »Polyhybridismus«, der dann vorliegt, wenn bezüglich mehrerer Merkmale Unterschiede auftreten und die einzelnen Merkmale (z. B. Form der Blüte, Größe der ganzen Pflanze usw.) unabhängig voneinander in Kombination treten. (Bezüglich schärferer Unterscheidung zwischen Merkmalen und Erbfaktoren vergl. Anm. 24a.) Wir behandeln diesen verwickelteren Fall im zweiten Abschnitt der vorliegenden Arbeit, deren Ziele und hauptsächlichste Ergebnisse in folgendem bestehen.

Eine Gesamtheit von Individuen verschiedener Typen derselben Art von Lebewesen, die sich miteinander in Lebensgemeinschaft befinden, wird eine gemischte Population genannt und man spricht von panmiktischer Vermehrung oder Panmixie, wenn bei einer solchen sich selbst überlassenen Population (in der freien Natur, oder etwa auch in einer sog. Ramschkultur) alle möglichen Kreuzungen zwischen den verschiedenen Typen auftreten, wenn also freie Vermischung nach Zufallsregeln erfolgt. Bei Mendelscher Vererbung ergibt sich dann nach dem oben Gesagten immer nur eine beschränkte Zahl verschiedener — teils homozygoter, teils heterozygoter — Typen, derart, daß darüber hinaus auch bei fortgesetzten Kreuzungen keine weiteren Typen entstehen können. Nimmt man nun an, daß für eine Generation (die »Ausgangsgeneration«) bekannt ist, welches die Anzahl der Individuen der verschiedenen Biotypen in dieser Generation ist, oder daß wenigstens die Verhältnisse bekannt sind, in denen diese Anzahlen zueinander stehen, so entsteht die Frage, welches bei panmiktischer Fortpflanzung die entsprechenden Zahlenverhältnisse in der nächsten Generation (der »ersten Filial-Generation«) und in den folgenden Generationen sein werden. Wir beschäftigen uns mit dieser Aufgabe und im besonderen mit der Frage, wie weit der von verschiedenen Seiten ausgesprochene Satz, der die Konstanz dieser Zahlenverhältnisse der verschiedenen Biotypen bei Panmixie behauptet, für beliebige Ausgangs-Zahlenverhältnisse gültig ist.

Zunächst legen wir unseren Rechnungen gewisse (auch sonst übliche) Voraussetzungen[1]) über gleichmäßige Verteilung der Geschlechter, sowie über gleichmäßige Lebens- und Reproduktionsfähigkeit der verschiedenen Biotypen zugrunde. Unter diesen Gleichmäßigkeits-Voraussetzungen ergeben sich gewisse Bedingungen für die Zahlenverhältnisse in der Ausgangs-Generation (wir nennen sie »Konstanzbedingungen« oder »Gleichgewichtsbedingungen«[2])), als notwendig und hinreichend für die Konstanz in den folgenden Generationen — und damit wesentliche Einschränkungen, denen der Satz von der Konstanz dieser Verhältnisse unterworfen ist.

Dabei zeigt der Fall nur eines einzigen Merkmals (Monohybridismus) gegenüber dem Fall mehrerer unabhängiger Merkmale (Polyhybridismus) bemerkenswerte Vereinfachungen. Bei Monohybridismus treten Zahlenverhältnisse, die den Gleichgewichtsbedingungen genügen, stets bereits in der auf die Ausgangsgeneration folgenden 1. Filialgeneration auf, und da alle folgenden Generationen dann die gleichen Verhältnisse aufweisen, so treten die konstanten Verhältniswerte rein in Erscheinung, sobald die Ausgangsgeneration ausgestorben ist. Erst äußere Momente (z. B. im Zusammenhang mit vorübergehender Reduktion der Population auf wenige Individuen) können den Uebergang zu anderen Zahlenverhältnissen herbeiführen, die sich aber wieder von der nächstfolgenden Generation an in solche umwandeln, die den Gleichgewichtsbedingungen genügen.

Hingegen werden bei Polyhybridismus, wenn man für die Ausgangsgeneration beliebige Zahlenverhältnisse annimmt (die den Gleichgewichtsbedingungen nicht genügen) — und im übrigen wieder die oben genannten Gleichmäßigkeits-Voraussetzungen zugrundelegt —, diese Verhältniswerte sich in den folgenden Generationen solchen, die den Gleichgewichtsbedingungen genügen, im allgemeinen nur schrittweise annähern: man hat Grenzwerte, denen die Verhältnisse beliebig nahekommen[3]), ohne daß sie (in der

[1]) Diese Gleichmäßigkeits-(Uniformitäts-)Voraussetzungen sollen im folgenden kurz als »Voraussetzungen (*U*)« bezeichnet werden. Doch sei bemerkt, daß auch das Auftreten selektiver Momente (das Wort in ganz allgemeinem Sinn genommen), der Fall geschlechtsgebundener Merkmale sowie Faktorenkoppelung den gleichen Methoden zugänglich ist, worauf zurückzukommen wohl noch Gelegenheit sein wird.

[2]) Vgl. Anm. 21.

[3]) Natürlich ist diese Aussage nur im Sinne der Kennzeichnung des mathematischen Unterschiedes gegenüber dem Falle des Monohybridismus zu verstehen. Denn da es sich nur um Feststellung der nach Zufallsgesetzen wahrscheinlichsten Werte unserer Zahlenverhältnisse handelt,

ersten oder einer späteren Filialgeneration) je genau erreicht würden[4]). Nur in ganz besonderen Fällen wird bereits die erste Filialgeneration genau die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

Unsere Behandlung des Polyhybridismus im zweiten Abschnitt umfaßt auch den Monohybridismus als Spezialfall (für $m = 1$). Gleichwohl wurde im ersten Abschnitt jene des Monohybridismus vorausgeschickt, nicht nur, weil selbst über diesen einfachsten Fall in der Literatur neben richtigen auch ungenaue oder geradezu unrichtige Angaben anzutreffen sind, sondern vor allem zur Einführung in die analoge Behandlungsweise des allgemeinen Falles.

In der Fachliteratur über die in Frage stehenden Hybridationsvorgänge herrscht die Behandlung des Falles vor, daß für jeden einzelnen Erbfaktor (z. B die Blütenfarbe) die Anzahl der reinrassigen Merkmalsformen genau zwei beträgt (wie rot und weiß beim Mirabilis-Fall), wobei die betreffenden Typen in üblicher Weise etwa die Bezeichnungen $A\,A$ und $a\,a$ erhalten (die Bastardform aber $A\,a$). Da die mathematischen Betrachtungen aber dadurch prinzipiell nicht schwieriger werden, habe ich sie auf den allgemeinen Fall ausgedehnt, daß eine bezüglich jedes Merkmals beliebige Anzahl r von reinrassigen Merkmalsformen zur Kreuzung zugelassen wird, bzw. in der Population auftritt (z. B. drei der Farbe nach verschiedene homozygotische Formen $A\,A$, $a\,a$, $\alpha\,\alpha$ mit den zugehörigen drei[5]) heterozygotischen $A\,a$, $A\,\alpha$, $a\,\alpha$)[6]). Dies führte dazu, die gebräuchliche Bezeichnungsweise der Erbfaktoren im Sinne größerer mathematischer Handlichkeit umzuformen (durch Indizes bzw. Nummern) und die Anlegung der üblichen (für kompliziertere Fälle und allgemeine Betrachtungen aber umständlichen bzw. unübersehbaren) Schachbrett-Tafeln durch einfache Rechnungen (unter Einführung geeigneter Hilfsgrößen) zu ersetzen.

Als Nicht-Biologe habe ich es unterlassen, die einschlägigen Stellen der Fachliteratur zusammenzustellen. Fast alles, was mir darüber bekannt geworden ist, geht direkt oder letzten Endes auf die freundliche Unterstützung zurück, die ich von hiesigen Kollegen einschlägiger Fächer erfahren habe und wofür ich auch an dieser Stelle wärmsten Dank sage[7]). Wenn ich ein bestimmtes Werk über Vererbungslehre speziell anführe, so geschieht es, weil ich zufällig gerade durch dieses auf die behandelten Fragen aufmerksam wurde und mir eine Stelle darin den Anstoß zu den folgenden Rechnungen gab[8]).

Die angewendete Mathematik beschränkt sich auf die einfachsten Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung und einen einfachen Grenzwertsatz —, abgesehen von der unumgänglichen Verwendung von Summenzeichen für einfache und mehrfache Summen —, unumgänglich insbesondere, wenn die verschiedensten Fälle hinsichtlich Zahl der men-

---

denen gegenüber jeder mit einer beschränkten Zahl von Exemplaren arbeitende Einzelfall Abweichungen aufweist (Streuung), so kann weder (bei Monohybridismus) die theoretisch genaue Konstanz der Verhältnisse in den Filialgenerationen, noch (bei Polyhybridismus) die unbeschränkte, den Grenzwert aber theoretisch nie genau erreichende Annäherung praktisch zur Beobachtung kommen. Uebrigens läßt sich natürlich auch die Streuung ihrerseits mathematisch behandeln (im Zusammenhang damit die Frage nach stabilem, labilem oder indifferentem Gleichgewicht für die den Gleichgewichtsbedingungen genügenden Zahlenverhältnisse), worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

[4]) Nebenbei bemerkt treten auch im Fall des Wirkens selektiver Momente (hier bereits bei Monohybridismus) Fragen nach Grenzwerten auf, denen sich im Laufe der Generation n die Zahlenverhältnisse schrittweise annähern, und zwar in gewissen Fällen, wie bekannt, derart, daß praktisch einzelne Typen rasch eliminiert werden.

[5]) Analog allgemein bei r homozygotischen Formen (eines Erbmerkmals) $^1/_2\, r\,(r-1)$ heterozygotische.

[6]) In der neueren Literatur spielt, wovon ich nach Fertigstellung meiner bezüglichen Rechnungen Kenntnis erhalten habe, dieser allgemeine Fall des sog. »multiplen Allelomorphismus« bereits eine gewisse Rolle.

[7]) Auch gedenke ich gerne der anregenden Mitteilungen über Vererbungslehre, die Herr Kollege P. Claussen (jetzt in Marburg) in unserer hiesigen techn.-naturwiss.-mathemat. Vereinigung gemacht hat.

[8]) Von Behandlungen des Gegenstandes durch Mathematiker ist mir außer den in Anm. 9 genannten (auf Monohybridismus für $r = 2$ bezüglichen) Abhandlungen von G. H. Hardy und K. Pearson nur durch mündliche Mitteilung des Herrn Study auf der Leipziger Naturforscher-Versammlung 1922 bekannt geworden, daß er selbst den Fall des Dihybridismus behandelt, jedoch nichts darüber veröffentlicht hat. Gleichfalls im Anschluß an die Leipziger Tagung machte mich Herr v Mises freundlicherweise auf folgende Arbeit aufmerksam, die mir aber leider hier nicht zugänglich ist: Hagström, Ein erblichkeitstheoretisches Grenzproblem, Svenska Aktuarie-föreningens Tidskrift 1917, p. 162–176. Ueber einen in Leipzig von mir gehaltenen Vortrag wird kurz berichtet im Jahresbericht der Deutsch. Mathem. Vereinigung 31 (1922), 2. Abt., p. 114.

delnden Merkmale und Zahl der Formen des einzelnen Merkmals nicht jeder Fall für sich in ständiger Wiederholung analoger Betrachtungen, sondern durch eine allgemeine Gesamtbetrachtung erledigt werden sollten. Bei dieser Generalisierung hoffen wir die von der Natur gezogenen Grenzen eingehalten zu haben. Bekanntlich bildet, wie für unseren Gegenstand so auch für die Mehrzahl aller Romane, die Liebe zwischen den beiden Geschlechtern die treibende Kraft; und es wird dem Mathematiker nachgesagt, wenn er einen Roman schriebe, so wäre es der »allgemeine«, in dem nicht 2, sondern allgemein n verschiedene Geschlechter auftreten, — woraus ja jeder Leser nach Wunsch durch Spezialisierung für $n = 2$ einen gewöhnlichen Roman machen könne. Man wird finden, daß wir uns in diesem Punkte sogleich mit dem Spezialfall begnügt haben[8a]).

I. Fall eines einzelnen Merkmals (Monohybridismus)[8b]).

1. Populationszahlen. Wir beginnen beim Monohybridismus (Anzahl der Merkmale $m = 1$) mit dem zumeist betrachteten einfachsten Fall von zwei zur Kreuzung kommenden reinrassigen Typen[9]) (also $r = 2$; über den Fall $r > 2$, d. h. multiplen Allelomorphismus, vgl. **10**). Diese Typen seien mit AA und aa, der Bastardtypus mit $Aa = aA$ bezeichnet — wobei wir uns vorläufig nicht darum kümmern, ob etwa letzterer äußerlich dasselbe Aussehen wie AA hat (A gegen a dominant ist), oder ob Aa einen intermediären Typus darstellt. Um, wie es besonders später nötig wird, übersichtlichere Formeln zu bekommen, sollen die Faktoren A bzw. a auch mit A_1 bzw. A_2 oder auch kurz mit den Nummern 1 bzw. 2 bezeichnet werden, so daß für unsere Typen z. B. AA bzw. Aa auch $A_1A_1 = (1, 1)$ bzw. $A_1A_2 = (1, 2)$ geschrieben wird. Irgend ein Faktorenpaar A_iA_j oder irgend ein Zahlenpaar (i, j), wo sowohl i als j eine der Zahlen 1 oder 2 bedeutet, stellt also einen Biotypus dar. Mit $P(AA)$ [oder auch $P(A_1A_1) = P(1, 1)$] oder kürzer P_{11} werde die Anzahl der in einer Population vorhandenen Exemplare des Typus $AA = (1, 1)$ bezeichnet und die entsprechende Bedeutung mögen $P(Aa) = P(aA) = P_{12} = P_{21}$ und $P(aa) = P_{22}$ für die anderen Typen haben. Bedeutet P die Gesamtzahl aller Exemplare in der Population, so ist also

$$P_{11} + P_{12} + P_{22} = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Aus den »Populationszahlen« P_{ij} ergeben sich die »relativen Populationszahlen«[10])

$$p_{11} = \frac{P_{11}}{P},\ p_{12} = p_{21} = \frac{P_{12}}{P} = \frac{P_{21}}{P},\ p_{22} = \frac{P_{22}}{P},$$

und jede dieser Zahlen p_{ij} gibt den Bruchteil an, den die Exemplare vom Typus (i, j) in der ganzen Population ausmachen. Division von (1) durch P ergibt

$$p_{11} + p_{12} + p_{22} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Welches ist nun das Schicksal einer solchen sich selbst überlassenen großen Population bei freier (panmiktischer) Vermehrung, und zwar unter den in der Einleitung genannten Voraussetzungen gleichmäßiger Lebens- und Reproduktionsfähigkeit aller Typen und gleichmäßiger Verteilung der Geschlechter [Voraussetzungen $(U)^1$)]? Welches sind im besonderen die wahrscheinlichsten Werte[11]) für die rPZ in der nächsten und den folgenden Generationen? Wir wollen mit einem oberen Index 1 die PZ und rPZ

[8a]) Eine Zusammenstellung der Abkürzungen, die im folgenden verwendet werden, mag hier Platz finden: GZ = Gametenzahl(en); rGZ = relative GZ; rGZ 1. O = rGZ erster Ordnung (analog: 2. O = zweiter Ordnung usw.); PZ = Populationszahl(en); rPZ = relative PZ; PHZ = Populations-Hilfszahl(en); rPHZ = relative PHZ; ♂ = männlich; ♀ = weiblich.

[8b]) Diesen und manchen anderen Fachausdruck, der den Nicht-Biologen wohl entbehrlich erscheinen dürfte, hat der Verfasser nicht unterdrücken wollen, um den Zusammenhang mit der biologischen Literatur zu wahren.

[9]) Die wesentlichen über diesen Fall entwickelten Resultate sind nicht neu; siehe G. H. Hardy, Mendelian proportion in a mixed population, Science, New York, 28 (1908), p. 49—50; Karl Pearson, On the ancestral gametic Correlations of a Mendelian Population mating at Random, Proc. R. Soc. of London 81 (1909), Ser. B. Vgl. auch K. Pearson, On a generalised Theory of alternative Inheritance, with special Reference to Mendel's Laws., Phil. Transact. R. Soc. of London, A, vol. 203, p. 53.

[10]) Wir schreiben späterhin abgekürzt PZ und rPZ für die Worte: »Populationszahl(en)« und »relative Populationszahl(en)«.

[11]) Diese wahrscheinlichsten Werte werden ceteris paribus mit den tatsächlichen um so besser übereinstimmen, je größer die Population ist.

für die nächste Generation [erste Filialgeneration[12])] bezeichnen, also mit P^1_{11}, P^1_{12}, P^1_{22} die PZ mit p^1_{11}, p^1_{12}, p^1_{22} die rPZ, mit P^1 die Gesamtstärke der F^1-Generation. Dann handelt es sich zunächst darum, wenn p_{11}, p_{12}, p_{22} bekannt sind, daraus p^1_{11}, p^1_{12}, p^1_{22} zu berechnen und zu sehen, wann die neuen rPZ den alten gleich ausfallen, wann nicht.

2. Populations-Hilfszahlen. Um möglichst glatte Formeln zu bekommen, führen wir als rechnerische Hilfsgrößen ein:

$$\left.\begin{array}{llll} Q_{11} = P_{11}, & Q_{12} = {}^1/_2 P_{12} = Q_{21} = {}^1/_2 P_{21}, & Q_{22} = P_{22} \\ q_{11} = p_{11}, & q_{12} = {}^1/_2 p_{12} = q_{21} = {}^1/_2 p_{21}, & q_{22} = p_{22} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und bezeichnen die Q_{ij} als Populations-Hilfszahlen, die q_{ij} als relative Populations-Hilfszahlen[13]). Es ist dann $q_{ij} = \frac{Q_{ij}}{P}$ (für beliebige i, j). Ferner folgt aus (1) wegen $P_{12} = 2Q_{12} = Q_{12} + Q_{21}$ sofort:

$$P = Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} + Q_{12} \text{ oder } P = \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

(wo in der Summe Σ jeder Buchstabe i, j für sich die Werte 1 und 2 durchläuft); und analog aus (2):

$$1 = q_{11} + q_{12} + q_{21} + q_{22} \text{ oder } 1 = \sum_{i,j=1}^{2} q_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

3. Gametenzahlen. Die Entwicklung der F^1- aus der F^0-Generation wird durch Vererbungsgesetze beherrscht, die sich bekanntlich — ohne daß auf die Chromosomentheorie eingegangen werden müßte — in folgendem schematischen Bilde darstellen lassen: Für die von einem (männlichen bzw. weiblichen) Individuum unserer Population entwickelten (männlichen bzw. weiblichen) Keimzellen (Gameten) lassen sich, und zwar in gleicher Weise bei beiden Geschlechtern, zwei Typen (Gametentypen) unterscheiden: A_1 und A_2. Ist nun $A_i A_j$ einer unserer Biotypen, so gilt für die von Individuen dieses Biotypus entwickelten Keimzellen: Wenn der Biotypus reinrassig, also $A_1 A_1$ bzw. $A_2 A_2$ ist, dann sind alle von ihm entwickelten Keimzellen vom gleichen Typus: alle vom Typus A_1 bzw. alle vom Typus A_2. Hingegen sind die von Individuen des hybriden Biotypus $A_1 A_2$ entwickelten Keimzellen durchschnittlich zur Hälfte vom Typus A_1, zur Hälfte vom Typus A_2; alle Fälle zusammengefaßt: im Durchschnitt ist stets (ob nun $i = j$ oder $i \neq j$) die Hälfte der von Individuen des Biotypus $A_i A_j$ entwickelten Keimzellen vom Typus A_i, die andere Hälfte vom Typus A_j. Aus der Vereinigung einer männlichen Keimzelle vom Typus A_i mit einer weiblichen vom Typus A_j — aber ganz ebenso (!) auch aus der einer männlichen A_j mit einer weiblichen A_i — entsteht ein Individuum vom Biotypus $A_i A_j = A_j A_i$.

Um nun auf Grund dieser Vererbungsgesetze aus einer gegebenen Verteilung der F^0-Generation auf die drei Biotypen die (wahrscheinlichste) Verteilung der F^1 Generation zu bestimmen, achten wir zunächst auf die Gesamtheit aller für die Entstehung eines Individuums der F^1-Generation mitwirkenden Keimzellen eines bestimmten Geschlechts, etwa die männlichen (♂)[14]). Wir fragen, wie sich diese Keimzellen auf die beiden Gametentypen A_1 und A_2 verteilen

Nun folgt aus unseren Gleichmäßigkeits-Voraussetzungen (U), denen gemäß bei jedem Biotypus die Verteilung auf die beiden Geschlechter die gleiche ist[15]), daß sich die männlichen F^0-Individuen für sich allein auf die drei Biotypen $A_1 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_2$ ebenso wie die Gesamtpopulation im Verhältnis $P_{11} : P_{12} : P_{22} = p_{11} : p_{12} : p_{22}$ verteilen;

---

[12]) Sie möge, entsprechend der üblichen Bezeichnung, als F^1 Generation bezeichnet werden, ebenso allgemein die $n$te Filialgeneration als F^n-Generation und entsprechend die Ausgangs-(Paternal-) Generation als F^0-Generation.

[13]) Wir werden die Worte »Populations-Hilfszahl(en)« und »relative Populations-Hilfszahl(en)« mit PHZ und rPHZ abkürzen.

[14]) Die gleiche Ueberlegung gilt dann für die »mitwirkenden« weiblichen (♀) Keimzellen. Da wir den vollen Uebergang von einer Generation zur nächsten im Auge haben, so denken wir als »mitwirkende« Keimzellen nur jene mitgezählt, aus deren Vereinigung mit einer Keimzelle des anderen Geschlechts ein lebensfähiges, selbst zur Geschlechtsreife gelangendes Individuum der F^1-Generation hervorgeht. Nebenbei bemerkt ist also die Gesamtzahl der als »mitwirkend« gezählten Keimzellen eines jeden Geschlechts gleich der Anzahl der (geschlechtsreifen) Individuen der nächsten Generation.

[15]) Dabei könnte sehr wohl die Anzahl der ♂- von der der ♀-Individuen verschieden sein, nur muß das Zahlenverhältnis in jedem Biotypus das gleiche sein.

und weiters folgt aus (U), daß die von der Gesamtheit der ♂-Individuen eines jeden Biotypus beigesteuerten mitwirkenden Keimzellen den bezüglichen Individuenzahlen proportional sind, daß also p_{11} bzw. p_{12} bzw. p_{22} den Anteil aus allen mitwirkenden ♂-Keimzellen angibt, der von den männlichen F^0-Individuen des Typus $A_1 A_1$ bzw. $A_1 A_2$ bzw. $A_2 A_2$ herkommt. Wie verteilen sich nun diese ♂-Keimzellen auf die Gametentypen A_1 und A_2? Nach den Vererbungsgesetzen gehört der ganze Anteil p_{11} und der halbe p_{12} zu A_1, der andere halbe p_{12} und der ganze p_{22} zu A_2. Es geben also die Zahlen

$$p_{11} + {}^1/_2\, p_{12} = q_{11} + q_{12} = g_1 \text{ bzw. } {}^1/_2\, p_{21} + p_{22} = q_{21} + q_{22} = g_2 \quad . \quad . \quad (6)$$

den Anteil an, der von der Gesamtheit aller mitwirkenden ♂-Keimzellen auf den Typus A_1 bzw. A_2 entfällt. Natürlich ist dabei

$$g_1 + g_2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wie man auch mittels (5) bestätigt. Wie bereits bemerkt, ergeben sich für die ♀-Keimzellen die gleichen Verteilungszahlen g_1, g_2. Zusammengefaßt: Sei $h = 1$ oder 2, so gibt $g_h = q_{h1} + q_{h2} = \sum_{k=1}^{2} q_{hk}$ für die von der F^0-Generation produzierten, an der Entstehung der F^1-Generation mitwirkenden Keimzellen eines bestimmten Geschlechts den Bruchteil an, der auf den Gametentypus A_h entfällt. Wir nennen die Zahlen g_h »relative Gametenzahlen« (abgekürzt: rGZ).

Es ist rechnerisch (zur Vermeidung von Brüchen) bisweilen bequem, neben den durch (6) definierten rGZ noch die folgenden analog gebildeten Zahlen zu benutzen, die wir Gametenzahlen (abgekürzt GZ) nennen wollen:

$$G_1 = P_{11} + {}^1/_2\, P_{12} = Q_{11} + Q_{12}, \qquad G_2 = {}^1/_2\, P_{21} + P_{22} = Q_{21} + Q_{22}.$$

Ersichtlich ist $\frac{G_1}{P} = g_1$, $\frac{G_2}{P} = g_2$, $G_1 + G_2 = P$. Doch geben diese GZ natürlich keinen Aufschluß über die tatsächliche Anzahl der »mitwirkenden« Keimzellen — und damit über die Stärke P^1 der F^1-Generation — und kommen nur als Verhältniszahlen in Betracht: $G_1 : G_2 = g_1 : g_2$.

4. Uebergang zur F^1-Generation. Nachdem wir uns in **3** für die an der Entstehung der F^1 Generation mitwirkenden Keimzellen eine Uebersicht über ihre Verteilung auf die Typen A_1 und A_2 verschafft haben, lassen sich ohne Schwierigkeit die rPZ für die F^1-Generation bestimmen, d. h. die Zahlen $p^1{}_{ij}$, die angeben, mit welchem Anteil der Biotypus $A_i A_j$ in der F^1-Generation vertreten sein wird.

Für die Entstehung eines Individuums der F^1-Generation sind nach den Vererbungsgesetzen vier Fälle möglich, je nach dem Typus A_1 oder A_2 der männlichen oder weiblichen elterlichen Keimzelle:

$$♂\, A_1 \times ♀\, A_1, \quad ♂\, A_1 \times ♀\, A_2, \quad ♂\, A_2 \times ♀\, A_1, \quad ♂\, A_2 \times ♀\, A_2 \quad . \quad . \quad (8),$$

und wir wollen dementsprechend von vier Gruppen von F^1 Individuen sprechen. Dabei gehören jene der 1. Gruppe zum Biotypus $A_1 A_1$, jene der 2. und 3. zu $A_1 A_2$, jene der 4. zu $A_2 A_2$. Es kommt nun nur darauf an, die relative Häufigkeit für das Auftreten jedes der vier Fälle (8) anzugeben, um daraus sofort die Verteilung der F^1-Generation auf die drei Biotypen zu gewinnen. Das ist aber ohne weiteres möglich mit Hilfe der rGZ. Sei z. B. $g_1 = {}^1/_4$, $g_2 = {}^3/_4$. In ${}^1/_4$ aller Fälle überhaupt ist die ♂ Zelle vom Typus A_1; von diesen Fällen werden wieder ${}^1/_4$ mit einer ♀ A_1- und ${}^3/_4$ mit einer ♀ A_2-Zelle sich verbinden[16]), d. h. ${}^1/_4 \cdot {}^1/_4 = {}^1/_{16}$, allgemein $g_1 \cdot g_1$ aller Fälle ist von der Art ♂ $A_1 \times$ ♀ A_1 und ${}^1/_4 \cdot {}^3/_4 = {}^3/_{16}$, allgemein $g_1 \cdot g_2$ aller Fälle ist ♂ $A_1 \times$ ♀ A_2; desgleichen ist ${}^3/_4 \cdot {}^1/_4 = {}^3/_{16}$, allgemein $g_2 \cdot g_1$ aller Fälle ♂ $A_2 \times$ ♀ A_1, und ${}^3/_4 \cdot {}^3/_4 = {}^9/_{16}$, allgemein $g_2 \cdot g_2$ aller Fälle ist ♂ $A_2 \times$ ♀ A_2. Sonach sind die relativen Häufigkeiten der vier Fälle (8) der Reihe nach $g_1 \cdot g_1$, $g_1 \cdot g_2$, $g_2 \cdot g_1$, $g_2 \cdot g_2$. Diese Zahlen geben also der Reihe nach den Anteil, den jede der oben unterschiedenen vier Gruppen in der Gesamtheit der F^1-Individuen ausmacht. Da die 2. und 3. Individuengruppe demselben Biotypus angehören, so ergeben sich daraus die folgenden Werte für die rPZ der F^1-Generation:

$$p^1{}_{11} = g_1 g_1, \qquad p^1{}_{12} = g_1 g_2 + g_2 g_1 = 2 g_1 g_2, \qquad p^1{}_{22} = g_2 g_2 \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

womit die gewünschten Formeln für den Uebergang von der F^0- zur F^1-Generation aufgestellt sind.

---

[16]) Zufolge der Voraussetzungen (U) findet nämlich keinerlei Bevorzugung bei den Verbindungen der einzelnen Biotypen statt.

Für die rPHZ der F^1-Generation: $q^1_{11} = p^1_{11}$, $q^1_{12} = {}^1/_2\, p^1_{12}$, $q^1_{22} = p^1_{22}$ (vgl. (3)) erhält man aus (9) die noch einfacheren Formeln:

$$q^1_{11} = g_1 g_1, \qquad q^1_{12} = g_1 g_2, \qquad q^1_{22} = g_2 g_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10),$$

die sich alle in $q^1_{ij} = g_i g_j$ zusammenfassen lassen [17]).

Man kann (9) und (10) auch in die Form folgender Proportionen kleiden (an Stelle der rGZ sind die ihnen proportionalen GZ verwendbar):

$$P^1_{11} : P^1_{12} : P^1_{22} = G_1 G_1 : 2\, G_1 G_2 : G_2 G_2, \qquad Q^1_{11} : Q^1_{12} : Q^1_{22} = G_1 G_1 : G_1 G_2 : G_2 G_2 \quad (11).$$

5. Konstanz der rGZ. So wie aus den rPHZ der F^0-Generation vermöge (6) die rGZ g_1, g_2 für die F^0-Generation, so lassen sich aus den rPHZ der F^1-Generation die rGZ g^1_1, g^1_2 für die F^1-Generation bilden (diese Zahlen spielen dann die entsprechende Rolle für den Uebergang zur F^2-Generation). Man erhält:

$$g^1_1 = q^1_{11} + q^1_{12} = g_1 (g_1 + g_2), \qquad g^1_2 = q^1_{21} + q^1_{22} = g_2 (g_1 + g_2),$$

also wegen (7):

$$g^1_1 = g_1, \qquad g^1_2 = g_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12);$$

d. h. die rGZ ändern sich nicht beim Uebergang zur nächsten Generation (und daher auch nicht in allen späteren Generationen), natürlich eine Aussage, wie alle anderen, über die wahrscheinlichsten zu erwartenden (bzw. durchschnittlichen) Werte.

6. Spätere Generationen. Nun vollzieht sich der Uebergang von der F^1- zur F^2-Generation nach denselben Regeln wie der von F^0 zu F^1, und wir haben also dafür die zu (9), (10) entsprechenden Formeln [18]): $p^2_{11} = g^1_1 g^1_1$, $p^2_{12} = 2 g^1_1 g^1_2$, $p^2_{22} = g^1_2 g^1_2$ bzw. $q^2_{ij} = g^1_i g^1_j$ und wegen (12) ergibt sich so $q^2_{ij} = g_i g_j = q^1_{ij}$ und dementsprechend $p^2_{11} = p^1_{11}$, $p^2_{12} = p^1_{12}$, $p^2_{22} = p^1_{22}$, d. h. die rPHZ und rPZ ändern sich nicht beim Uebergang von F^1 zu F^2.

Natürlich kann man den gleichen Schluß fortsetzen. Da sich die rGZ beim Fortschreiten von Generation zu Generation nicht ändern, die rPHZ und rPZ jeder Generation sich aber allein aus den rGZ der vorhergehenden berechnen lassen, so bleiben bei Panmixie unter den Gleichmäßigkeitsvoraussetzungen (U) bei Monohybridismus in allen folgenden Generationen die relativen Populations-Hilfszahlen und relativen Populationszahlen ungeändert gleich denen der ersten Filialgeneration [19]) und sind (für jede F^n-Generation von $n = 1, 2 \ldots$ aufwärts) gegeben durch die Formeln

$$q^n_{ij} = g\; g_j, \qquad p^n_{11} = g_1 g_1, \qquad p^n_{12} = 2 g_1 g_2, \qquad p^n_{22} = g_2 g_2.$$

Wesentlich ist aber, wie wir sehen werden, die Einschränkung dieser Behauptung auf die Filialgenerationen (unter Ausschluß der Ausgangsgeneration) und insbesondere auf Monohybridismus.

7. Gleichgewichtsbedingungen. Daß ein beliebiges PZ-Verhältnis der Ausgangs-Generation in der nächsten Generation nicht notwendig wiederkehrt, ist leicht an Beispielen zu sehen (vgl. Nr 8). Wir fragen, bei welchen Zahlenverhältnissen ist dies der Fall [20]), d. h. wann bestehen die Gleichungen $p_{ij} = p^1_{ij}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichungen $q_{ij} = q^1_{ij}$? Setzt man für q^1_{ij} aus (10) seinen Wert ein, so hat man: Konstanz der rPHZ (und der rPZ) besteht dann und nur dann, wenn $q_{ij} = g_i g_j$ ist, also:

$$q_{11} = g_1 g_1, \qquad q_{12} = g_1 g_2, \qquad q_{22} = g_2 g_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Diese drei Bedingungen sind aber völlig gleichwertig der einen:

$$q_{11}\, q_{22} = (q_{12})^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Denn aus den drei Bedingungen (13) folgt (14); aber auch umgekehrt, wenn (14) erfüllt ist, folgen jene drei Bedingungen; setzt man nämlich $q_{11} = (t_1)^2$, $q_{22} = (t_2)^2$, so wird $q_{12} = \sqrt{q_{11} q_{22}} = t_1 t_2$, also allgemein $q_{ij} = t_i t_j$; dabei ist $1 = q_{11} + 2 q_{12} + q_{22} = (t_1 + t_2)^2$,

---

[17]) Diese Formeln zusammen mit den die q_{ij}, g_h liefernden (3), (6) sind im Wesen natürlich nichts anderes als eine gedrängte Zusammenfassung des üblichen Schachbrettverfahrens; vgl. auch das ausgerechnete Beispiel Nr. 8.

[18]) Wir bezeichnen allgemein mit einem oberen Index n die PZ, rPZ usw. für die F^n-Generation, also beispielsweise P^n_{11} p^n_{11}, q^n_{ij}, g^n_h. Darnach bedeutet z. B im Zeichen p^2_{11} die »2« einen oberen Ind x — Hinweis auf die F^2-Generation — keinen Potenzexponenten; wo letztere auftreten, klammern wir die zu potenzierenden Größen ein, also z. B $p_{11} = (g_1)^2$.

[19]) Vgl. Hardy und Pearson, l. c. [9])

[20]) Aus Nr. 6 wissen wir nur, daß dies sicher bei allen Zahlenverhältnissen der Fall ist, die sich bei einer Filialgeneration aus irgend einer anderen Generation einstellen.

also $t_1 + t_2 = 1$, ferner $g_1 = q_{11} + q_{12} = t_1\,(t_1 + t_2) = t_1$, $g_2 = q_{21} + q_{22} = t_2\,(t_1 + t_2) = t_2$, somit $q_{ij}\,(= t_i\,t_j)$ tatsächlich $= g_i g_j$, d. h. (13) erfüllt. Also stellt wirklich (14) die notwendige und hinreichende Konstanz-(Gleichgewichts-)Bedingung für die Zahlenverhältnisse einer Population dar[21]). Man kann sie auch in der Form schreiben (wie man durch Multiplikation mit $P \cdot P$ erhält):

$$Q_{11}\,Q_{22} = (Q_{12})^2 \quad \text{oder} \quad P_{11}\,P_{22} = (\tfrac{1}{2}\,P_{12})^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

8. Beispiele. In seinem bekannten Lehrbuch über Vererbungslehre gibt A. Lang[22]) folgendes Beispiel eines bei Panmixie konstanten Zahlenverhältnisses einer monohybriden Population: $25\,AA : 10\,Aa : 1\,aa$, in unserer Schreibweise also $P_{11} : P_{12} : P_{22} = 25 : 10 : 1$, somit $p_{11} = {}^{25}/_{36}$, $p_{12} = {}^{10}/_{36}$, $p_{22} = {}^{1}/_{36}$ oder $Q_{11} : Q_{12} : Q_{22} = 25 : 5 : 1$ und $q_{11} = {}^{25}/_{36}$, $q_{12} = {}^{5}/_{36}$, $q_{22} = {}^{1}/_{36}$. Ersichtlich ist die Konstanzbedingung (14) bzw. (15) erfüllt. Nehmen wir mit A. Lang an, die betrachtete Population würde durch irgend ein Ereignis reduziert auf eine ganz kleine Population von wenigen Individuen mit dem Zahlenverhältnis $P_{11} : P_{12} : P_{22} = 7 : 5 : 2$. Nehmen wir diese zur Ausgangspopulation, was würde sich bei panmiktischer, sehr ergiebiger Vermehrung ergeben?[23])

Wegen $P_{11} : P_{12} : P_{22} = 7 : 5 : 2 = 14 : 10 : 4$ ist $Q_{11} : Q_{12} : Q_{22} = 14 : 5 : 4$, und da $5^2 = 25$ nicht gleich 14×4, so ist die Konstanzbedingung (15) nicht erfüllt und das Zahlenverhältnis muß sich (entgegen der Angabe a. a. O.) ändern! Man hat $p_{11} = q_{11} = {}^{14}/_{28}$, $p_{22} = q_{22} = {}^{4}/_{28}$, $p_{12} = {}^{10}/_{28}$, $q_{12} = {}^{5}/_{28}$, hieraus (vgl. Nr. 3) $g_1 = {}^{19}/_{28}$, $g_2 = {}^{9}/_{28}$, also $q^1_{11} = p^1_{11} = ({}^{19}/_{28})^2 = {}^{361}/_{784}$, $q^1_{22} = p^1_{22} = ({}^{9}/_{28})^2 = {}^{81}/_{784}$, $q^1_{12} = {}^{19}/_{28} \cdot {}^{9}/_{28} = {}^{171}/_{784}$, $p^1_{12} = 2\,q^1_{12} = {}^{342}/_{784}$ oder etwas einfacher gerechnet: $Q_{11} : Q_{12} : Q_{22} = 14 : 5 : 4$, also $G_1 : G_2 = (14 + 5) : (5 + 4) = 19 : 9$, also nach (11) $Q^1_{11} : Q^1_{12} : Q^1_{22} = 19^2 : 19 \cdot 9 : 9^2 = 361 : 171 : 81$ und $P^1_{11} : P^1_{12} : P^1_{22} = 361 : 342 : 81 = 6{,}44 : 6{,}11 : 1{,}45$ und dieses Verhältnis bleibt (nach **6**) für alle späteren Generationen konstant, alles natürlich bei Bestehen der Voraussetzungen (U) und innerhalb angemessener Fehlergrenzen. Auf 1400 Exemplare der neu entwickelten Population kommen also $644\,AA : 611\,Aa : 145\,aa$ und nicht $700\,AA : 500\,Aa : 200\,aa$, wie es der Fall wäre, wenn das Verhältnis $7 : 5 : 2$ sich bei Panmixie konstant erhielte[24]).

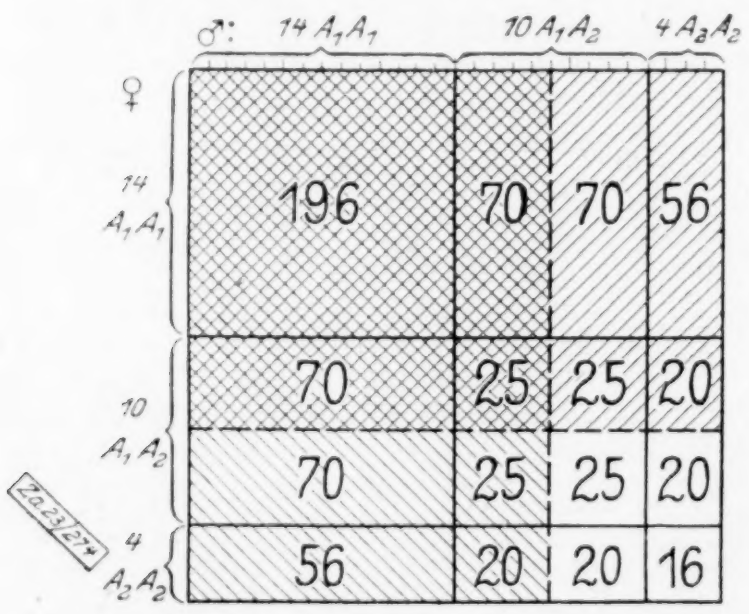


Abb. 1

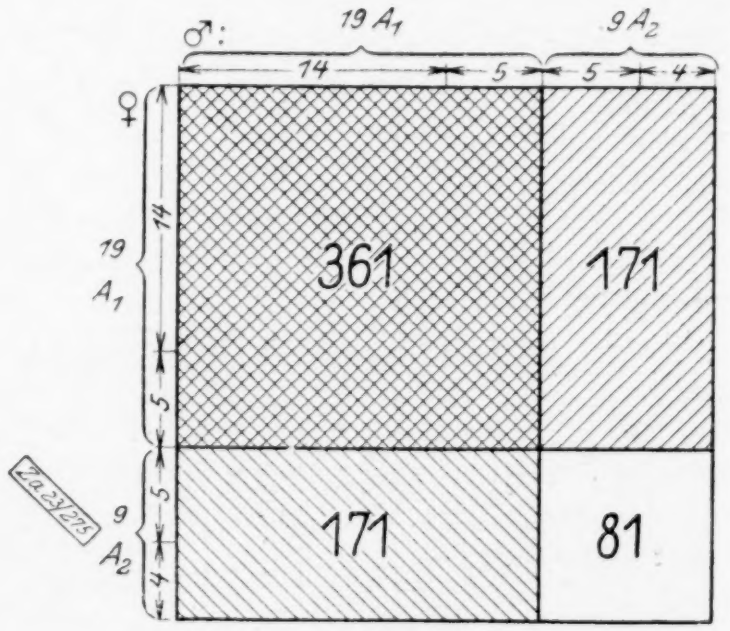


Abb. 2

Den Uebergang von der F^0- zur F^1-Generation unseres Beispiels nach der üblichen Schachbrettmethode veranschaulicht Abb. 1, wobei die betreffenden Anzahlen von F^1-

[21]) Vgl. Hardy, l. c. [9]). Diese Bedingungen wurden gelegentlich (ebenso auch von mir in einem kurzen Vortragsbericht, l. c. [8])) auch »Stabilitäts«-Bedingungen genannt, was ich jetzt vermeide, weil es sich in den meisten Fällen (insbesondere in allen hier unter den Voraussetzungen (U) betrachteten) um ein im Sinn der Anm. [3]) indifferentes Gleichgewicht handelt: kleine Störungen werden nicht rückgängig, sondern führen auf benachbarte neue Gleichgewichtszustände.

[22]) A. Lang, Die experimentelle Vererbungslehre in der Zoologie I, Jena 1914, p. 63.

[23]) Für eine ganz kleine Ausgangspopulation unterliegen die Wahrscheinlichkeitsansätze natürlich starker Unsicherheit. Es kann daher nur von »ganz klein« relativ zum früheren Bestand die Rede sein.

[24]) Daß sich nicht jedes beliebige Ausgangsverhältnis konstant erhalten kann, ist übrigens schon aus dem trivialen Beispiel $1\,AA : 0\,Aa : 1\,aa$ zu ersehen ($p_{11} = p_{22} = {}^1/_2$, $p_{12} = 0$), wo sich, wie bekannt, in der F^1-Generation das gänzlich verschiedene Verhältnis $1\,AA : 2\,Aa : 1\,aa$ einstellt ($p^1_{11} = p^1_{22} = {}^1/_4$, $p^1_{12} = {}^1/_2$).

Individuen den angegebenen Flächeninhalten (wie 196, 70 usw.) proportional sind. Vergleichsweise zeigt Abb. 2 jene Zusammenfassung gleichartiger Teile der F^1-Generation, wie sie unserer Rechenmethode mit den GZ entspricht.

9. Dominanz einer Merkmalsform. Ist $A = A_1$ über $a = A_2$ dominant, so daß die äußerlich nicht unterscheidbaren Biotypen (AA) und (Aa) einen einzigen Phänotypus $(A\,*)$ darstellen, dann wird dieser durch $P_{11} + P_{12} = P_{1*}$ Exemplare repräsentiert. Setzen wir den Fall, in einer solchen Population sei ein Zahlenverhältnis $P_{1*} : P_{22}$ als (angenähert) konstant bleibend festgestellt. Macht man dann die Hypothese, die Gleichmäßigkeitsvoraussetzungen (U) seien erfüllt, so kann man daraus auf das Zahlenverhältnis der reinrassigen (AA) zu den Hybriden (Aa) unter den P_{1*} Exemplaren schließen. Es genüge, dies an einem Beispiel zu zeigen. Sei $P_{1*} : P_{22} = 80 : 1$, also $p_{1*} = p_{11} + p_{12} = {}^{80}/_{81}$, $p_{22} = {}^{1}/_{81}$. Da wir Konstanz voraussetzen, gilt (13), also ist $p_{22} = q_{22} = (g_2)^2 = {}^{1}/_{81}$, somit $g_2 = {}^{1}/_{9}$ und $g_1 = 1 - {}^{1}/_{9} = {}^{8}/_{9}$, daher zufolge (9) $p_{11} = q_{11} = (g_1)^2 = {}^{64}/_{81}$, $p_{12} = 2\,q_{12} = 2\,g_1 g_2 = {}^{16}/_{81}$. Also ist $P_{11} : P_{12} = p_{11} : p_{12} = 4 : 1$, d. h. im Phänotypus $(A\,*)$ kommt auf 4 reinrassige 1 Bastard. Wird das durch Kreuzungsversuche innerhalb des Phänotypus nicht bestätigt, so läßt sich nach rückwärts schließen, daß die Gleichmäßigkeitsvoraussetzungen (U) im betrachteten Fall nicht zutreffen können.

10. Multipler Allelomorphismus: $r > 2$. Bei multiplem Allelomorphismus wird der einzelne Biotypus wieder durch eine Formel $A_i A_j$ oder einfach (i,j) dargestellt, wobei aber jetzt i und j je eine der Zahlen 1, 2, . . ., r bedeuten kann, wenn r die Zahl der reinen Formen des Merkmals ist. Entsprechend unterscheidet man r Gametentypen: A_1, A_2, . . ., A_r. Die PZ P_{ij} geben an, wie viele Individuen einer Population vom Typus $A_i A_j$ sind (P die Gesamtzahl aller Individuen); $p_{ij} = P_{ij} : P$ sind die rPZ; wir führen die PHZ Q_{ij} ein durch die Festsetzung $Q_{ij} = P_{ij}$ oder $= {}^{1}/_{2}\,P_{ij}$, je nachdem i gleich j oder i ungleich j; die rPHZ sind dann $q_{ij} = Q_{ij} : P$, also gleich p_{ij} oder ${}^{1}/_{2}\,p_{ij}$, je nachdem $i = j$ oder $i \neq j$. In Analogie zu (4) gilt dann $P = Q_{11} + Q_{22} + \ldots + Q_{rr} + 2\,Q_{12} + 2\,Q_{13} + \ldots + 2\,Q_{r-1,r}$

$$= (Q_{11} + Q_{12} + \ldots + Q_{1r}) + (Q_{21} + Q_{22} + \ldots + Q_{2r}) + \ldots + (Q_{r1} + Q_{r2} + \ldots + Q_{rr}) = \sum_{i,j=1}^{r} Q_{ij}.$$

Führt man noch die GZ und rGZ ein: $G_h = Q_{h1} + Q_{h2} + \ldots + Q_{hr} = \sum_{k=1}^{r} Q_{hk}$, $g_h = q_{h1} + q_{h2} + \ldots + q_{hr} = \sum_{k=1}^{r} q_{hk}$, wobei $\sum_{h=1}^{r} G_h = P$, $\sum_{h=1}^{r} g_h = 1$, so ergibt die Anwendung der in Nr. 3 genannten Vererbungsgesetze für den Uebergang zur F^1-Generation wieder die allgemeine Formel $q^1{}_{ij} = g_i g_j$ (also $p^1{}_{ij} = g_i g_j$ oder $= 2\,g_i g_j$, je nachdem $i = j$ oder $i \neq j$) und $g_h{}^1 = g_h$ für alle h von 1 bis r. Somit gilt auch hier der Satz von der Konstanz der rGZ, ebenso der von der Konstanz der rPZ von der ersten Filial-Generation an ($q^n{}_{ij} = g_i g_j$ für alle $n = 1, 2, \ldots$). Auch ist es nicht schwer, die Konstanzbedingungen aufzustellen; man erhält zunächst $q_{ij} = g_i g_j$; daraus findet man: für Konstanz der rPZ ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen $q_{ii} q_{jj} = (q_{ij})^2$ für jedes beliebige Zahlenpaar i, j bestehen.

II. Fall mehrerer unabhängiger Merkmale. (Polyhybridismus.)

11. Populationszahlen. Wir wollen uns mit einer besonderen Betrachtung des Dihybridismus (Anzahl der Merkmale = 2) nicht aufhalten und gehen sogleich zum allgemeinen Fall des Polyhybridismus über (Anzahl der Merkmale = m), in dem jener als Spezialfall für $m = 2$ mitenthalten ist. Wenn wir bezüglich des ersten Merkmals, z. B. der Blütenfarbe, zwei reinrassige Typen betrachten, so mögen diesen in ihrer »Konstitutionsformel« die Bezeichnungen $A_1^{(1)} A_1^{(1)}$ bzw. $A_2^{(1)} A_2^{(1)}$ zugewiesen werden, wobei der obere Index 1 andeutet, daß es sich um das erste Merkmal handelt, der untere die beiden Erscheinungsformen, z. B. rot und weiß, mit 1 bzw. 2 kennzeichnet. Dem Bastardtypus wird dann die Bezeichnung $A_1^{(1)} A_2^{(1)}$ $(= A_2^{(1)} A_1^{(1)})$ zugewiesen, und zwar gleichgültig, ob er einen von den Typen $A_1^{(1)} A_1^{(1)}$ und $A_2^{(1)} A_2^{(1)}$ äußerlich verschiedenen (etwa rosafarbenen) Phänotypus darstellt, oder ob dies wegen Dominanz eines der Merkmale $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$ über das andere nicht der Fall ist.

Nun ist es aber, wie bereits erwähnt, rechnerisch keine Erschwerung, mehr als zwei bezüglich des betrachteten Merkmals reinrassige Typen ins Auge zu fassen

(»multiplen Allelomorphismus« bezüglich dieses Merkmals), z. B. noch einen dritten gelbblühenden Typus, dem die Bezeichnung $A_3^{(1)} A_3^{(1)}$ zugewiesen werde. Es sind dann bezüglich des ersten Merkmals drei Bastardtypen zu unterscheiden: $A_1^{(1)} A_2^{(1)}$, $A_1^{(1)} A_3^{(1)}$ und $A_2^{(1)} A_3^{(1)}$. Allgemein werde mit r_1 die Anzahl der bezüglich des ersten Merkmals reinrassigen Typen bezeichnet, wobei diesen selbst die Bezeichnungen $A_1^{(1)} A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)} A_2^{(1)}$, ..., $A_{r_1}^{(1)} A_{r_1}^{(1)}$ zugewiesen seien, während für die Bastardtypen die Formeln $A_i^{(1)} A_j^{(1)}$ mit verschiedenen unteren Indizes i, j gelten. (Auf die Reihenfolge der beiden Faktoren kommt es dabei nicht an: $A_i^{(1)} A_j^{(1)} = A_j^{(1)} A_i^{(1)}$.)

Ganz das Entsprechende ist für das zweite Merkmal zu sagen. Hat man — was der bisher zumeist betrachtete Fall ist — bei diesem Merkmal wieder nur zwei reinrassige Typen, so seien ihnen die Bezeichnungen $A_1^{(2)} A_1^{(2)}$ und $A_2^{(2)} A_2^{(2)}$ und dem Bastardtypus die Bezeichnung $A_1^{(2)} A_2^{(2)}$ zugewiesen. Im allgemeinen Fall heiße r_2 die Anzahl der bezüglich des 2-ten Merkmals reinrassigen Typen, und die verschiedenen ihnen bzw. den Bastardtypen zugewiesenen Bezeichnungen sind $A_i^{(2)} A_j^{(2)}$, wo i, j zwei Zahlen aus der Reihe 1, 2, ..., r_2 sind, und zwar $i = j$ für bezüglich dieses Merkmals reinrassige, $i \neq j$ für Bastardtypen. — Analog für alle m Merkmale[24a]).

Das gibt für den einzelnen Biotypus eine Konstitutionsformel:

$$A_{i_1}^{(1)} A_{j_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} A_{j_2}^{(2)} \ldots A_{i_m}^{(m)} A_{j_m}^{(m)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

wobei für jedes Faktorenpaar

$$A_{i_s}^{(s)} A_{j_s}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots m)$$

die Zahlen i_s und j_s der Reihe 1, 2, .., r_s entnommen sind; es ist $i_s = j_s$, wenn für das s-te Merkmal Reinrassigkeit vorliegt, andernfalls sind i_s, j_s verschieden. Der gewöhnlich betrachtete Fall ist der, wo alle Zahlen $r_s = 2$ sind. Innerhalb jedes einzelnen Faktorenpaares ist dabei wieder die Reihenfolge der beiden Faktoren als belanglos anzusehen:

$$A_{i_s}^{(s)} A_{j_s}^{(s)} = A_{j_s}^{(s)} A_{i_s}^{(s)}{}^{25}).$$

Statt (16) schreiben wir als Formel für den Biotypus bisweilen einfach:

$$(i_1, j_1;\ i_2, j_2;\ \ldots;\ i_m, j_m).$$

Es werde — analog wie in Nr. 1 — mit

$$P(A_{i_1}^{(1)} A_{j_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} A_{j_2}^{(2)} \ldots A_{i_m}^{(m)} A_{j_m}^{(m)})$$

oder auch kürzer $P(i_1, j_1;\ i_2, j_2;\ \ldots;\ i_m, j_m)$ oder $P_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m}$

die Anzahl der in einer Population vorhandenen Exemplare vom Typus (16) bezeichnet (»Populationszahlen« = PZ). Bedeutet P die Gesamtzahl aller Exemplare in der Population, so geben die »relativen Populationszahlen« (= rPZ)

$$p_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m} = \frac{P_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m}}{P}$$

den Bruchteil an, den die Exemplare vom Typus (16) in der ganzen Population ausmachen.

Die erste Aufgabe, die wir behandeln (Nr. 12 bis 15), besteht darin, aus einer durch die Zahlen $p_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m}$ gegebenen Ausgangsverteilung der Typen in einer panmiktisch

[24a]) Der Einfachheit halber sprechen wir von m verschiedenen Merkmalen, die unabhängig voneinander kombinierbar sind; es wäre korrekter, schlechtweg von m Paaren von Erbfaktoren zu sprechen, deren jedes durch ein Symbol wie $A_i^{(1)} A_j^{(1)}$, bzw. $A_i^{(2)} A_j^{(2)}$, ..., bzw. $A_i^{(m)} A_j^{(m)}$ darstellbar ist. Es kann nämlich vorkommen daß mehrere dieser m Erbfaktorenpaare sich auf dasselbe äußerliche Merkmal, etwa alle auf die Blütenfarbe beziehen derart, daß die Färbung des einzelnen Exemplars durch die Gesamtheit dieser Erbfaktorenpaare bestimmt ist. Andererseits kann es aber auch vorkommen (und zwar schon bei Monohybridismus), daß ein einziges Erbfaktorenpaar in mehreren äußerlichen Merkmalen (z. B. sowohl der Haarfarbe, als der Augenfarbe als der Hautfarbe) in Erscheinung tritt.

[25]) Die Anzahl der verschiedenen Biotypen, die man so erhält, ist $\frac{r_1 (r_1 + 1)}{2} \ldots \frac{r_m (r_m + 1)}{2}$, also gleich 3^m, wenn $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 2$ ist (d. h. wenn für kein Merkmal multipler Allelomorphismus vorliegt).

sich vermehrenden Population (unter den Gleichmäßigkeitsvoraussetzungen (*U*), vgl. [1])) nach Wahrscheinlichkeitsregeln die Verteilung in der nächsten Generation (F^1-Generation) zu berechnen; bezeichnet also P^1 die Gesamtstärke der F^1-Generation, sind ferner $P^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$ die PZ, also

$$P^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} : P^1 = p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$$

die rPZ der F^1-Generation, so handelt es sich darum, wenn die Zahlen $p_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$ bekannt sind, daraus die $p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$ zu berechnen; die zweite Aufgabe bildet die Untersuchung des weiteren Schicksals bei Fortschreiten zu immer späteren Generationen (Nr. 18 bis 28), insbesondere die Kennzeichnung derjenigen Verteilungen, die sich dabei konstant erhalten (Aufstellung der »Konstanz«- oder »Gleichgewichtsbedingungen«, Nr. 23, 24).

12. Populations-Hilfszahlen. Für die Durchführung unserer Rechnungen erweist sich die Einführung gewisser Hilfsgrößen als zweckmäßig. Zunächst werde, wenn (i_1, j_1), (i_2, j_2), . . ., (i_m, j_m) irgend m Zahlenpaare sind, mit $\beta\,(i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_m, j_m)$ die Zahl bezeichnet, die angibt, bei wievielen unter diesen Zahlenpaaren die beiden Zahlen i, j verschieden sind, d. h. also für wieviele Merkmale der Typus (16) hybrid (heterozygot) ist[26]). Ferner bedeute $\gamma\,(i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_m, j_m)$ die Anzahl der übrigen Zahlenpaare (i_1, j_1), (i_2, j_2) . . ., (i_m, j_m), die also aus zwei gleichen Zahlen bestehen, d. h. die Anzahl der Merkmale, für welche der Typus (16) reinrassig ist. Es gilt somit

$$\beta\,(i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_m, j_m) + \gamma\,(i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_m, j_m) = m \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Neben den PZ $P_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m}$ führen wir nun noch die »Populationshilfszahlen« (PHZ) ein:

$$Q_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m} = \frac{1}{2^{\beta\,(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m)}} P_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Ist wieder P die Anzahl aller Individuen der Population, so gilt, wie sogleich gezeigt werden soll, die Formel

$$P = \sum_{i_1 i_2 \dots i_m\, j_1 j_2 \dots j_m} Q_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Dabei ist die Summe rechts so zu verstehen, daß jeder der Indizes $i_1, i_2, \dots, i_m$, $j_1, j_2, \dots, j_m$ alle Werte, die für ihn in Betracht kommen, durchlaufen soll (also i, und j von 1 bis r,) und für jede derartige Wertekombination die bezügliche Zahl $Q_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$ als Summand anzusetzen ist. Ist z. B. $m = 2$ und $r_1 = 2$, $r_2 = 2$ (Dihybridismus mit je 2 Merkmalsformen), dann haben in der Summe $\sum_{i_1 i_2 j_1 j_2} Q_{i_1 j_1 i_2 j_2}$ alle Indizes $i_1, j_1, i_2 j_2$ jeder für sich die Werte 1 und 2 zu durchlaufen, was im ganzen 16 Summanden gibt:

$$\begin{aligned} &Q_{11\,11} + Q_{11\,12} + Q_{11\,21} + Q_{11\,22} + Q_{12\,11} + Q_{12\,12} + Q_{12\,21} + Q_{12\,22} \\ &+ Q_{21\,11} + Q_{21\,12} + Q_{21\,21} + Q_{21\,22} + Q_{22\,11} + Q_{22\,12} + Q_{22\,21} + Q_{22\,22} \quad . \quad (20). \end{aligned}$$

Nun ist, um zunächst für dieses Beispiel die Formel (19) zu bestätigen:

$$\begin{aligned} &Q_{11\,11} = P_{11\,11}, \quad Q_{22\,11} = P_{22\,11}, \quad Q_{12\,11} = Q_{21\,11} = {}^1/_2 P_{12\,11}, \\ &Q_{11\,12} = Q_{11\,21} = {}^1/_2 P_{11\,12}, \quad Q_{22\,12} = Q_{22\,21} = {}^1/_2 P_{22\,12}, \quad Q_{12\,12} = Q_{12\,21} = Q_{\cdot\,12} = Q_{21\,21} = {}^1/_4 P_{12\,12}, \\ &Q_{11\,22} = P_{11\,22}, \quad Q_{22\,22} = P_{22\,22}, \quad Q_{12\,22} = Q_{21\,22} = {}^1/_2 P_{12\,22}. \end{aligned}$$

Man sieht aus dieser Zusammenstellung: Wenn von den Zahlenpaaren (i_1, j_1), $(i_2 j_2)$ keines aus zwei verschiedenen Zahlen besteht, also sowohl $i_1 = j_1$ als $i_2 = j_2$ ist (wenn also $\beta\,(i_1 j_1\, i_2 j_2) = 0$ ist), dann enthält die Summe (20) genau einen Summanden, der gleich $P_{i_1 j_1 i_2 j_2}$ ist (Summandenzahl $1 = 2^0$, also $= 2^{\beta\,(i_1 j_1 i_2 j_2)}$); wenn von den Zahlenpaaren $(i_1\, j_1)$, $(i_2\, j_2)$ gerade eines aus zwei verschiedenen Zahlen besteht ($\beta\,(i_1\, j_1\, i_1\, j_2) = 1$), dann enthält (20) genau zwei Summanden ($2 = 2^1 = 2^{\beta\,(i_1 j_1 i_2 j_2)}$), die gleich ${}^1/_2 P_{i_1 j_1 i_2 j_2}$ sind, deren Summe also $P_{i_1 j_1 i_2 j_2}$ ist; wenn endlich von den Zahlenpaaren $(i_1\, j_1)$, $(i_2\, j_2)$ alle beide aus verschiedenen Zahlen bestehen ($\beta\,(i_1\, j_1\, i_2\, j_2) = 2$), dann enthält (20) genau vier ($4 = 2^2 = 2^{\beta\,(i_1 j_1 i_2 j_2)}$) Summanden gleich ${}^1/_4 P_{i_1 j_1 i_2 j_2}$, deren Summe also $P_{i_1 j_1 i_2 j_2}$ ist. Danach wird die Summe (20) gleich

$$P_{11\,11} + P_{11\,12} + P_{11\,22} + P_{22\,11} + P_{22\,12} + P_{22\,22} + P_{12\,11} + P_{12\,12} + P_{12\,22},$$

---

[26]) Man könnte $\beta\,(i_1\, j_1\, i_2\, j_2 \dots i_m\, j_m)$ etwa als Hybridationsgrad des Typus (16) bezeichnen. Ist $\beta\,(i_1\, j_1\, i_2\, j_2 \dots i_m\, j_m) = 0$, so ist der Typus (16) in allen Merkmalen rein (homozygot).

also gleich der Summe der Individuenzahlen aller der verschiedenen Biotypen und somit tatsächlich gleich P. Damit ist in unserem Beispiel die Formel (19) bestätigt. Aber ganz ebenso wie in diesem Beispiel erkennt man ganz allgemein: wenn wieder $\beta(i_1 j_1 \ldots i_m j_m)$ die Anzahl derjenigen unter den Zahlenpaaren $(i_1 j_1), \ldots, (i_m j_m)$ bezeichnet, die aus zwei verschiedenen Zahlen bestehen, dann kommen unter den Summanden auf der rechten Seite von Formel (19) genau $2^{\beta(i_1 j_1 \ldots i_m j_m)}$ Summanden vor, die alle gleich $Q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ sind (und sich höchstens in der Schreibweise von $Q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ durch Vertauschung von Indizes innerhalb der einzelnen Indexpaare $(i_\varkappa j_\varkappa)$ unterscheiden), deren Summe also gleich $2^{\beta(i_1 j_1 \ldots i_m j_m)} Q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} = P_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ ist. Die rechte Seite von (19) stellt also die Summe der Individuenanzahlen der verschiedenen Biotypen unserer Population dar und ist daher gleich P, d. h. Formel (19) gilt allgemein.

Analog zu (18) führen wir noch die »relativen Populations-Hilfszahlen« (rPHZ) ein:

$$q_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m} = \frac{1}{2^{\beta(i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m)}} p_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m} \quad \ldots\ldots \quad (21).$$

Es gelten die Formeln

$$q_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m} = \frac{Q_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m}}{P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22),$$

$$1 = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m j_1 j_2 \ldots j_m} q_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23),$$

wie man sofort sieht, wenn man beide Seiten von (18) bzw. (19) durch P dividiert.

In den Formeln von Nr. 2 erkennt man leicht Spezialfälle von (18), (19), (21), (22), (23) (für $m = 1$, wo $2^{\beta(i_1, j_1)} = 1$ oder 2, je nachdem $i_1 = j_1$ oder $i_1 \neq j_1$).

13. Gametenzahlen. Wir wollen nun den Uebergang von einer Ausgangs-Generation F^0 zu ihrer ersten Filial-Generation F^1 bei Panmixie verfolgen, und zwar unter den Gleichmäßigkeitsvoraussetzungen (U) und unter der Voraussetzung, daß alle m Merkmale vollständig unabhängig voneinander kombinierbar sind [27]). Für die maßgebenden Vererbungsgesetze haben wir dann folgendes schematische Bild:

a) Die einzelnen Keimzellen (eines jeden Geschlechtes) zerfallen in Typen (Gametentypen), denen man Formeln zuweisen kann von der Gestalt

$$A_{h_1}^{(1)} A_{h_2}^{(2)} \ldots A_{h_m}^{(m)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24),$$

wobei die Formel für jedes Merkmal einen Faktor aufweist ($A_{h_1}^{(1)}$ für das erste Merkmal, $A_{h_2}^{(2)}$ für das zweite, usw.) und h_1 eine der Zahlen $1, 2, \ldots, r_1$ bedeutet, h_2 eine der Zahlen $1, 2, \ldots, r_2$ usw. — b) Für die von den Individuen des Biotypus (16) entwickelten Keimzellen gilt dann: Greift man irgend ein Merkmal, z. B. das s-te heraus und ist der Biotypus bezüglich dieses Merkmals reinrassig, so daß $i_s = j_s$, $A_{i_s}^{(s)} = A_{j_s}^{(s)}$ ist, dann hat jede von diesem Biotypus entwickelte Keimzelle einen Gametentypus, in dessen Formel der s-te Faktor $A_{h_s}^{(s)}$ gleich $A_{i_s}^{(s)}$ $\left(= A_{j_s}^{(s)}\right)$, also $h_s = i_s\,(= j_s)$ ist; ist aber der Biotypus bezüglich dieses Merkmals hybrid, also $i_s \neq j_s$, dann hat (durchschnittlich) die Hälfte der entwickelten Keimzellen in der Formel ihres Gametentypus den Faktor $A_{i_s}^{(s)}$ (also $h_s = i_s$), die andere Hälfte den Faktor $A_{j_s}^{(s)}$ $(h_s = j_s)$. Genauer gilt (wenn, wie erwähnt, die Merkmale ganz »unabhängig mendeln«): Ist $\beta(i_1 j_1 \ldots i_m j_m)$ wieder die Anzahl der aus zwei verschiedenen Zahlen bestehenden unter den Zahlenpaaren $(i_1 j_1), \ldots, (i_m j_m)$, so entwickelt der Biotypus (16) Keimzellen von $2^{\beta(i_1 j_1 \ldots i_m j_m)}$ verschiedenen Gametentypen, und zwar jeden Typus in durchschnittlich gleicher Anzahl. Man erhält alle diese Gametentypen, indem man in Formel (24) h_1 entweder $= i_1$ oder $= j_1$ setzt, ebenso h_2 unabhängig davon entweder $= i_2$ oder $= j_2$ usw. — c) Ein aus der Vereinigung einer Keimzelle vom Gametentypus $A_{h_1}^{(1)} A_{h_2}^{(2)} \ldots A_{h_m}^{(m)}$ mit einer Keimzelle vom Gametentypus $A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} \ldots A_{k_m}^{(m)}$ entstehen-

[27]) Wir schließen also Koppelung von Merkmalen aus.

des Individuum hat den Biotypus [28]) $A^{(1)}_{h_1}\, A^{(1)}_{k_1}\, A^{(2)}_{h_2}\, A^{(2)}_{k_2}\, A^{(m)}_{hm}\, A^{(m)}_{km}$. Dabei ist es gleichgültig, welcher der beiden Gametentypen der männlichen, welcher der weiblichen Keimzelle zukommt.

Wenn wir auf Grund dieser Gesetze aus den rPZ der F^0-Generation die rPZ der F^1-Generation (nämlich ihre wahrscheinlichsten Werte) berechnen wollen, so geschehe dies, analog wie in **3, 4** in zwei Schritten. Zuerst verschaffen wir uns eine Uebersicht über die von der F^0-Generation entwickelten und zur Entstehung von Individuen der F^1-Generation »mitwirkenden« [29]) Keimzellen eines jeden Geschlechts, und zwar über die zahlenmäßige Verteilung auf die verschiedenen Gametentypen. Alsdann werden wir (Nr. 14, 15) daraus die Verteilung der F^1-Generation auf die verschiedenen Biotypen bestimmen können.

Nehmen wir also von den genannten mitwirkenden Keimzellen etwa die männlichen und fragen, welcher Bruchteil ihrer Gesamtzahl auf einen bestimmten Gametentypus, etwa auf den Typus (24), entfällt (das ganz entsprechende gilt dann wegen der Voraussetzungen (U) für die weiblichen Keimzellen). Nach dem Vererbungsgesetz b) kann dieser Typus nur von Individuen herkommen, deren Biotypus eine Formel hat, in der jeder der Erbfaktoren der Formel (24) auftritt, also eine Formel von der Gestalt

$$A^{(1)}_{h_1}\, A^{(1)}_{k_1}\, A^{(2)}_{h_2}\, A^{(2)}_{k_2} \ldots A^{(m)}_{hm}\, A^{(m)}_{km} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

wobei k_1 irgend eine Zahl der Reihe 1, 2 . . ., r_1, ebenso k_2 irgend eine Zahl der Reihe 1, 2 . . ., r_2 usw. sein kann.

Wir haben nun zu beachten: Erstens: Zufolge der Gleichmäßigkeitsvoraussetzungen (U) ist in jedem Biotypus die Verteilung der Individuen auf die beiden Geschlechter die gleiche; der Bruchteil, der angibt, wie viele aus der Gesamtheit aller männlichen F^0-Individuen zum Biotypus (25) gehören, ist also gleich der betreffenden rPZ, d. h. gleich $p_{h_1 k_1 \ldots hm\, km}$; und da — wieder gemäß (U) — die von einer gewissen Anzahl ♂ F^0-Individuen herrührenden »mitwirkenden« Keimzellen der Anzahl dieser Individuen (unabhängig von ihrem Biotypus) proportional sind, so gibt $p_{h_1 k_1 \ldots hm\, km}$ auch an, welcher Bruchteil aller mitwirkenden ♂-Keimzellen von ♂-Individuen des Typus (25) herrührt. Zweitens: Nach dem Vererbungsgesetz b) entwickelt der Biotypus (25) in durchschnittlich gleicher Anzahl Keimzellen von $2^{\beta(h_1 k_1 \ldots hm\, km)}$ verschiedenen Gametentypen, es gibt also $\frac{1}{2^{\beta(h_1 k_1 \ldots hm\, km)}}$ an, welcher Bruchteil aus allen vom Biotypus (25) herrührenden mitwirkenden Keimzellen speziell dem Gametentypus (24) angehört. Beides zusammengefaßt zeigt: In der Gesamtheit aller von der F^0-Generation produzierten mitwirkenden ♂-Keimzellen bilden diejenigen vom Gametentypus (24), welche speziell von ♂-Individuen des Biotypus (25) herrühren, einen Bruchteil, der angegeben wird durch die Zahl $\frac{1}{2^{\beta(h_1 k_1 \ldots hm\, km)}}\, p_{h_1 k_1 \ldots hm\, km}$, d. h. (vgl. (21)) durch die Zahl $q_{h_1 k_1 \ldots hm\, km}$.

Damit haben wir den Anteil ermittelt, den unter der Gesamtheit aller mitwirkenden ♂-Keimzellen jene vom Typus (24) ausmachen, die speziell von ♂-Individuen des Biotypus (25) herrühren, und wir haben ihn gleich $q_{h_1 k_1 \ldots hm\, km}$ gefunden. Den Anteil, den sämtliche Keimzellen vom Typus (24) unter der Gesamtheit aller ♂-Keimzellen ausmachen, erhalten wir daraus, indem wir nun sowohl für k_1, wie für k_2, usw. der Reihe nach alle ihre Werte, k_1 von 1 bis r_1, k_2 von 1 bis r_2, usw. einsetzen und über alle diese Wertekombinationen summieren. Wir erhalten so die Zahl

$$g_{h_1 h_2 \ldots hm} = \sum_{k_1 k_2 \ldots km} q_{h_1 k_1 h_2 k_2 \ldots hm\, km} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Da sich, wie gesagt, die gleichen Ueberlegungen ganz ebenso für die ♀-Keimzellen durchführen lassen, so ist der erste Schritt, von dem wir sprachen, erledigt. Wir sehen: In der Gesamtheit aller von der F^0-Generation produzierten zur F^1-Generation mitwirkenden Keimzellen eines bestimmten Geschlechts bilden diejenigen vom Gametentypus (24) einen durch die Zahl $g_{h_1 h_2 \ldots hm}$ angegebenen Bruchteil. Diese Zahlen heißen »relative Gametenzahlen« (rGZ), ihre Summe ist natürlich 1:

$$\sum_{h_1 h_2 \ldots hm} g_{h_1 h_2 \ldots hm} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

wie auch aus (26) und (23) ersichtlich.

---

[28]) Bei der Anschreibung dieses Biotypus kommt es auf die Reihenfolge der Faktoren innerhalb des einzelnen Faktorenpaares nicht an (vgl. Nr. 11).

[29]) Das Wort im gleichen Sinn genommen, wie in Anm. [14]).

Es ist bisweilen bequem, außer den rGZ noch die analog gebildeten Zahlen

$$G_{h_1 h_2 \ldots hm} = \sum_{k_1 k_2 \ldots km} Q_{h_1 k_1 h_2 k_2 \ldots hm\, km} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

zu benutzen, die wir »Gametenzahlen« (GZ) nennen. Division von (28) durch P bezw. Multiplikation von (27) mit P liefert:

$$\frac{G_{h_1 h_2 \ldots hm}}{P} = g_{h_1 h_2 \ldots hm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

bzw.

$$\sum_{h_1 h_2 \ldots hm} G_{h_1 h_2 \ldots hm} = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Mit der Bezeichnung »GZ« soll aber nicht etwa eine Aussage über die Zahl der tatsächlich mitwirkenden Keimzellen (und damit über die Stärke der F^1-Generation) gemacht werden; es sind die GZ lediglich Verhältniszahlen, die den rGZ proportial sind.

14. Uebergang zur F^1-Generation. Nunmehr können wir den zweiten der in **13** genannten Schritte vornehmen, die Bestimmung der Verteilung der F^1-Generation auf die verschiedenen Biotypen. Wir werden die auf die F^1 Generation bezüglichen Größen, zum Unterschied von den entsprechenden Größen für die F^0-Generation, mit einem oberen Index »1« bezeichnen. Es bedeutet also P^1 die Gesamtstärke der F^1-Generation, ferner sind $P^1{}_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ bzw. $Q^1{}_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ ihre PZ bzw. PHZ, ebenso $p^1{}_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} = P^1{}_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} : P^1$ und $q^1{}_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ die rPZ bzw. rPHZ für die F^1-Generation [30]).

Sehen wir zu, auf wie vielerlei Weisen [31]) nach dem Vererbungsgesetz c) ein bestimmter Biotypus

$$A^{(1)}_{i_1} A^{(1)}_{j_1} A^{(2)}_{i_2} A^{(2)}_{j_2} \ldots A^{(m)}_{i_m} A^{(m)}_{j_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

bei einem Individuum der F^1-Generation entstehen kann. Nehmen wir zunächt den Fall: alle $i_s = j_s$, d. h. der Biotypus (31) ist in allen Merkmalen reinrassig. Dann kann er nicht anders entstehen, als aus einer männlichen und weiblichen Keimzelle, die beide vom Typus $A^{(1)}_{i_1} A^{(2)}_{i_2} \ldots A^{(m)}_{i_m} = A^{(1)}_{j_1} A^{(2)}_{j_2} \ldots A^{(m)}_{j_m}$ sind. Nehmen wir weiter den Fall, daß ein Paar von Zahlen (i_s, j_s) aus zwei verschiedenen Zahlen besteht, z. B. das erste: $i_1 \neq j_1$, während für alle übrigen $i_s = j_s$ gilt. Dann kann der Biotypus (31) auf zwei Weisen entstehen: entweder aus einer männlichen Keimzelle mit dem Faktor $A^{(1)}_{i_1}$ und einer weiblichen mit dem Faktor $A^{(1)}_{j_1}$ $\left(\text{die übrigen Faktoren sind dabei stets } A^{(2)}_{i_2} \ldots A^{(m)}_{i_m} = A^{(2)}_{j_2} \ldots A^{(m)}_{j_m}\right)$ oder aus einer männlichen Keimzelle mit dem Faktor $A^{(1)}_{j_1}$ und einer weiblichen mit dem Faktor $A^{(1)}_{i_1}$. Nehmen wir weiter den Fall, daß zwei Paare von Zahlen aus voneinander verschiedenen Zahlen bestehen, z. B. $i_1 \neq j_1$, $i_2 \neq j_2$, während für alle übrigen $i_s = j_s$ gilt. Dann kann der Biotypus (31) auf 4 Weisen entstehen, die wir kurz so anschreiben können (wir schreiben nur die beiden ersten Faktoren an, da alle übrigen stets $A^{(3)}_{i_3} \ldots A^{(m)}_{i_m} = A^{(3)}_{j_3} \ldots A^{(m)}_{j_m}$ sind):

$$\sigma^{\!\!\!

die übrigen Zahlenpaare, wo $i_s = j_s$ ist, sowohl die ♂- wie die ♀-Keimzelle denselben Faktor $A^{(s)}_{i_s} = A^{(s)}_{j_s}$ bekommen). Wir können das auch folgendermaßen ausdrücken. Die Entstehungsweise eines Individuums des Biotypus (31) läßt sich durch eine Formel ausdrücken: $♂\ A^{(1)}_{h_1} A^{(2)}_{h_2} \dots A^{(m)}_{h_m} \times ♀\ A^{(1)}_{k_1} A^{(2)}_{k_2} \dots A^{(m)}_{k_m}$, wobei die einzelnen $A^{(s)}_{h_s}$ bzw. $A^{(s)}_{k_s}$ so bestimmt werden: Ist $i_s \neq j_s$, so ist entweder $h_s = i_s$, $k_s = j_s$ oder $h_s = j_s$, $k_s = i_s$ zu setzen; ist aber $i_s = j_s$, so sind h_s und k_s beide $= i_s = j_s$ zu setzen.

Wir haben $2^{\beta(i_1 j_1 \dots i_m j_m)}$ verschiedene mögliche Entstehungsweisen von Individuen des Biotypus (31) und denken uns danach die Gesamtheit aller F^1-Individuen des Biotypus (31) in Gruppen eingeteilt, indem wir in jeder Gruppe die Individuen gleicher Entstehungsweise zusammengefaßt denken. Wir können dann leicht den Bruchteil bestimmen, den die Individuen einer solchen Gruppe in der Gesamtheit aller Individuen der F^1-Generation ausmachen; und indem wir nachher über alle Gruppen eines und desselben Biotypus summieren, erhalten wir den Bruchteil, den die sämtlichen Individuen dieses Biotypus in der Gesamtheit aller Individuen der F^1-Generation überhaupt ausmachen, d. h. wir erhalten so die gesuchten rPZ $p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$.

Sei also irgend eine der genannten Gruppen von F^1-Individuen betrachtet, z. B. jener, die aus der Verbindung $♂\ A^{(1)}_{h_1} A^{(2)}_{h_2} \dots A^{(m)}_{h_m} \times ♀\ A^{(1)}_{k_1} A^{(2)}_{k_2} \dots A^{(m)}_{k_m}$ entstehen. In der Gesamtheit aller bei Entstehung der F^1-Generation mitwirkenden ♂-Keimzellen bilden jene vom Typus $A^{(1)}_{h_1} A^{(2)}_{h_2} \dots A^{(m)}_{h_m}$ einen durch die Zahl $g_{h_1 h_2 \dots h_m}$ angegebenen Bruchteil (Nr. 13); ebenso bilden in der Gesamtheit der mitwirkenden ♀-Keimzellen jene vom Typus $A^{(1)}_{k_1} A^{(2)}_{k_2} \dots A^{(m)}_{k_m}$ einen durch $g_{k_1 k_2 \dots k_m}$ angegebenen Bruchteil. Die ♂-Keimzellen vom Typus $A^{(1)}_{h_1} A^{(2)}_{h_2} \dots A^{(m)}_{h_m}$ gelangen nun bei Panmixie in Kombination mit den ♀-Keimzellen der verschiedenen Typen proportional den Zahlenverhältnissen, in denen diese Typen unter den ♀-Keimzellen vertreten sind[32]). Nun bilden die ♀-Keimzellen vom Typus $A^{(1)}_{k_1} A^{(2)}_{k_2} \dots A^{(m)}_{k_m}$ in der Gesamtheit aller mitwirkenden ♀-Keimzellen den Bruchteil $g_{k_1 k_2 \dots k_m}$; daher wird auch von allen jenen ♀-Keimzellen, welche mit einer ♂-Keimzelle $A^{(1)}_{h_1} A^{(2)}_{h_2} \dots A^{(m)}_{h_m}$ in Verbindung treten, der Bruchteil $g_{k_1 k_2 \dots k_m}$ dem Typus $A^{(1)}_{k_1} A^{(2)}_{k_2} \dots A^{(m)}_{k_m}$ angehören, d. h. in der Gesamtheit aller Verbindungen von ♂- und ♀-Keimzellen bilden diejenigen, für welche die männliche dem Typus $A^{(1)}_{h_1} A^{(2)}_{h_2} \dots A^{(m)}_{h_m}$, die weibliche dem Typus $A^{(1)}_{k_1} A^{(2)}_{k_2} \dots A^{(m)}_{k_m}$ angehört, den Bruchteil $g_{k_1 k_2 \dots k_m}$ vom Bruchteil $g_{h_1 h_2 \dots h_m}$, d. h. den Bruchteil $g_{h_1 h_2 \dots h_m}$ mal $g_{k_1 k_2 \dots k_m}$ (entsprechend der Regel: Wahrscheinlichkeit des simultanen Eintreffens zweier unabhängiger Ereignisse = Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten)[33]).

Wollen wir nun den Bruchteil, den der Biotypus (31) in der F^1-Generation ausmacht, d. h. die Zahl $p^1{}_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m}$ bestimmen, so haben wir nach dem obigen dafür folgende Regel: Wir bilden für die Individuen dieses Typus die genannten auf ihre Entstehungsweise bezüglichen Gruppen. Für jede solche Gruppe, sie sei $♂\ A^{(1)}_{h_1} A^{(2)}_{h_2} \dots A^{(m)}_{h_m} \times ♀\ A^{(1)}_{k_1} A^{(2)}_{k_2} \dots A^{(m)}_{k_m}$, bilden wir das Produkt $g_{h_1 h_2 \dots h_m} \cdot g_{k_1 k_2 \dots k_m}$. Die über alle Gruppen unseres Biotypus erstreckte Summe der Zahlen $g_{h_1 h_2 \dots h_m} g_{k_1 k_2 \dots k_m}$ ist dann gleich der gesuchten Zahl $p^1{}_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m}$.

---

[32]) Und zwar zufolge unserer Gleichmäßigkeitsvoraussetzungen (U), durch die ja bevorzugte Verbindungen ausgeschlossen sind.

[33]) Die Einfachheit dieser Berechnung beruht wesentlich darauf, daß wir uns dabei nur um den Gametentypus der elterlichen Keimzellen, nicht auch um den Biotypus der elterlichen Individuen zu kümmern haben. Sei z. B. $m = 2$ (Dihybridismus), $r_1 = 2$, $r_2 = 2$ und etwa der ♂-Gametentypus $A^{(1)}_1 A^{(2)}_1$ betrachtet; eine solche Zelle kann von einem F^0-Individuum stammen, das irgend einem der vier Biotypen $A^{(1)}_1 A^{(1)}_1 A^{(2)}_1 A^{(2)}_1$, $A^{(1)}_1 A^{(1)}_1 A^{(2)}_1 A^{(2)}_2$, $A^{(1)}_1 A^{(1)}_2 A^{(2)}_1 A^{(2)}_1$, $A^{(1)}_1 A^{(1)}_2 A^{(2)}_1 A^{(2)}_2$ angehört. Die Wahrscheinlichkeit aber, daß eine ♂-Keimzelle vom Typus $A^{(1)}_1 A^{(2)}_1$ mit einer ♀-Keimzelle eines bestimmten Typus (z. B. ebenfalls $A^{(1)}_1 A^{(2)}_1$) sich verbindet, ist, weil eben die Voraussetzungen (U) keine Bevorzugung in der Verbindung bestimmter Typen zulassen, stets die gleiche, welchem Biotypus auch die ♂ $A^{(1)}_1 A^{(2)}_1$-Zelle, welchem die ♀-$A^{(1)}_1 A^{(2)}_1$-Zelle entstammt. Vergl. die analoge Bemerkung [16]).

Es handelt sich darum, diese Regel durch eine mathematisch brauchbarere Formel zu ersetzen. Dazu soll erklärt werden, was unter dem Symbol

$$\sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g_{h_1 \dots h_m} g_{k_1 \dots k_m}$$

verstanden werden soll. Wir meinen damit eine Summe von lauter Ausdrücken der Gestalt $g_{h_1 \dots h_m} g_{k_1 \dots k_m}$, die so zu bilden sind, daß jedes Buchstabenpaar $h_s k_s$ höchstens bis auf die Reihenfolge mit dem Buchstabenpaar $i_s j_s$ zusammenfällt, daß also entweder $h_1 = i_1$, $k_1 = j_1$ oder $h_1 = j_1$, $k_1 = i_1$ gesetzt wird, desgleichen entweder $h_2 = i_2$, $k_2 = j_2$ oder $h_2 = j_2$, $k_2 = i_2$ usw. Da wir so bei jedem Buchstabenpaar $h_s k_s$ zwei Möglichkeiten haben und es im ganzen m Buchstabenpaare gibt, so gibt es im ganzen 2^m verschiedene Möglichkeiten und die Summe besteht also aus 2^m Summanden. Ist z. B. $m = 1$, so wird

$$\sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g_{h_1} g_{k_1} = g_{i_1} g_{j_1} + g_{j_1} g_{i_1}$$

(es treten zwei nur in der Anordnung der Faktoren verschiedene dem Werte nach gleiche Summanden auf; wir ziehen sie absichtlich hier und analog im folgenden nicht zusammen, um die Entstehungsweise der Summe nicht zu verwischen). Für $m = 2$ ist ebenso:

$$\sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g_{h_1 h_2} g_{k_1 k_2} = g_{i_1 i_2} g_{j_1 j_2} + g_{i_1 j_2} g_{j_1 i_2} + g_{j_1 i_2} g_{i_1 j_2} + g_{j_1 j_2} g_{i_1 i_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß unsere Regel zur Berechnung von $p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$ mit der folgenden Formel gleichwertig ist:

$$p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = \frac{1}{2^{\gamma(i_1 j_1 \dots i_m j_m)}} \sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g_{h_1 \dots h_m} g_{k_1 \dots k_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

hierbei unter $\gamma(i_1, j_1, \dots, i_m, j_m)$ wie früher die Anzahl derjenigen unter den Zahlenpaaren $(i_1 j_1), \dots, (i_m j_m)$ verstanden, für welche $i_s = j_s$ ist. In der Tat sei zunächst der Fall betrachtet, wo alle diese Zahlenpaare aus zwei gleichen Zahlen bestehen: $\beta(i_1, j_1, \dots, i_m, j_m) = 0$, $\gamma(i_1, j_1, \dots, i_m, j_m) = m$. Dann ist die Anzahl der oben unterschiedenen Gruppen von Individuen des Biotypus (31) in diesem Falle gleich 1; es gibt für sie nur eine einzige Entstehungsweise, nämlich aus einer ♂- und einer ♀-Keimzelle, beide vom gleichen Typus $A^{(1)}_{i_1} A^{(2)}_{i_2} \dots A^{(m)}_{i_m} = A^{(1)}_{j_1} A^{(2)}_{j_2} \dots A^{(m)}_{j_m}$; nach der obigen Regel ist also in diesem Fall $p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = g_{i_1 i_2 \dots i_m} g_{i_1 i_2 \dots i_m}$ (wofür man natürlich auch $g_{i_1 i_2 \dots i_m} g_{j_1 j_2 \dots j_m}$ schreiben könnte). Dasselbe aber ergibt Formel (34); denn in unserem Fall werden alle 2^m Summanden in (34) einander gleich und zwar gleich $g_{i_1 i_2 \dots i_m} g_{i_1 i_2 \dots i_m}$, die Summe wird also $2^m g_{i_1 i_2 \dots i_m} g_{i_1 i_2 \dots i_m}$, was mit $\frac{1}{2^{\gamma(i_1 j_1 \dots i_m j_m)}} = \frac{1}{2^m}$ multipliziert gerade den richtigen Wert $g_{i_1 i_2 \dots i_m} g_{i_1 i_2 \dots i_m}$ für $p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$ gibt. Im betrachteten Fall ist also die Richtigkeit von (34) bestätigt. — Betrachten wir weiter den Fall, wo unter den Zahlenpaaren $(i_1 j_1), \dots, (i_m j_m)$ genau eines ist, das aus zwei verschiedenen Zahlen besteht, z. B. $i_1 \neq j_1$, während in allen übrigen Zahlenpaaren die beiden Zahlen einander gleich sind: $i_2 = j_2, \dots, i_m = j_m$, $\beta(i_1 j_1 \dots i_m j_m) = 1$, $\gamma(i_1 j_1 \dots i_m j_m) = m - 1$. Die Anzahl der oben unterschiedenen Gruppen im Biotypus (31) ist jetzt gleich 2, gekennzeichnet durch

$$♂ A^{(1)}_{i_1} A^{(2)}_{i_2} \dots A^{(m)}_{i_m} \times ♀ A^{(1)}_{j_1} A^{(2)}_{i_2} \dots A^{(m)}_{i_m} \text{ bzw. } ♂ A^{(1)}_{j_1} A^{(2)}_{i_2} \dots A^{(m)}_{i_m} \times ♀ A^{(1)}_{i_1} A^{(2)}_{i_2} \dots A^{(m)}_{i_m}$$

und nach der obigen Regel ist also jetzt

$$p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = g_{i_1 i_2 \dots i_m} g_{j_1 i_2 \dots i_m} + g_{j_1 i_2 \dots i_m} g_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

(daß beide Summanden gleichen Wert haben, lassen wir absichtlich wieder unberücksichtigt). Dasselbe aber ergibt Formel (34). Denn in diesem Falle lassen sich die 2^m Summanden in (34) auf 2 Klassen verteilen, je nachdem $h_1 = i_1$, $k_1 = j_1$ oder $h_1 = j_1$, $k_1 = i_1$ ist (während allemal h_2 und k_2 beide $= i_2 = j_2, \dots, h_m$ und k_m beide $= i_m = j_m$ werden). Jede Klasse umfaßt gleichviele, nämlich 2^{m-1} Summanden, die Summe wird also gleich $2^{m-1} g_{i_1 i_2 \dots i_m} g_{j_1 i_2 \dots i_m} + 2^{m-1} g_{j_1 i_2 \dots i_m} g_{i_1 i_2 \dots i_m}$, was mit $\frac{1}{2^{\gamma(i_1 j_1 \dots i_m j_m)}} = \frac{1}{2^{m-1}}$ multipliziert gerade den richtigen Wert (s. o.) für $p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$ gibt. — Ganz ebenso bestätigt man (34) allgemein, wenn mehrere der Zahlenpaare $(i_1 j_1), \dots, (i_m j_m)$ aus voneinander verschiedenen Zahlen bestehen. Sei etwa noch kurz der Fall angedeutet, daß genau zwei Paare $(i_s j_s)$ mit voneinander verschiedenen Zahlen vorhanden sind, etwa $i_1 \neq j_1$, $i_2 \neq j_2$, hingegen $i_3 = j_3, \dots, i_m = j_m$, also $\beta(i_1 j_1 \dots i_m j_m) = 2$, $\gamma(i_1 j_1 \dots i_m j_m) = m - 2$.

Dann haben wir innerhalb eines solchen Biotypus 4 Gruppen von F^1-Individuen, gekennzeichnet durch die unter (32) angegebenen Formeln (die nicht angeschriebenen weiteren Faktoren sind allemal $= A^{(3)}_{i_3} A^{(4)}_{i_4} \dots A^{(m)}_{i_m}$) und unsere Regel gibt:

$$p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = g_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m} g_{j_1 j_2 i_3 \dots i_m} + g_{i_1 j_2 i_3 \dots i_m} g_{j_1 i_2 i_3 \dots i_m} + g_{j_1 i_2 i_3 \dots i_m} g_{i_1 j_2 i_3 \dots i_m} + g_{j_1 j_2 i_3 \dots i_m} g_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m}.$$

Die vier hier auftretenden Summanden stellen aber gerade die vier Klassen von Summanden dar, auf die sich die 2^m Summanden der Summe in (34) verteilen lassen, und zwar umfaßt jede dieser $4 = 2^2$ Klassen gleich viele, nämlich 2^{m-2} Summanden. Da nun $\frac{1}{2^{\gamma(i_1 j_1 \dots i_m j_m)}} = \frac{1}{2^{m-2}}$ ist, so bestätigt sich wieder die Uebereinstimmung von (34) mit unserer Regel für $p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$.

15. Rekursionsformeln. Etwas einfacher noch als die Formel (34) für die rPZ wird die für die rPHZ der F^1-Generation, die sich aus (34) vermöge

$$q^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = \frac{1}{2^{\beta(i_1 j_1 \dots i_m j_m)}} p^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}$$

unter Beachtung von (17) ergibt:

$$q^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = \frac{1}{2^m} \sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g_{h_1 \dots h_m} g_{k_1 \dots k_m} \quad \dots \quad (35).$$

Daraus erhält man weiter die rGZ für die F^1-Generation (die wieder für den Uebergang zur F^2-Generation maßgebend sind) vermöge (vgl. [30]):

$$g^1{}_{i_1 \dots i_m} = \sum_{j_1 \dots j_m} q^1{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = \frac{1}{2^m} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g_{h_1 \dots h_m} g_{k_1 \dots k_m} \quad \dots \quad (36).$$

Die Formeln (35) zusammen mit (26) stellen die übersichtlichste Form für den Uebergang von F^0 zu F^1 dar; sie geben aus den rPHZ der F^0-Generation (vermittelt durch deren rGZ) die rPHZ der F^1-Generation.

Ganz nach demselben Schema wie der Uebergang von der F^0- zur F^1-Generation, läßt sich natürlich der von der F^1- zur F^2-, von der F^2- zur F^3-, allgemein von der F^{n-1}- zur F^n-Generation ausführen. Man hat dafür [34]):

$$q^n{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = \frac{1}{2^m} \sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g^{n-1}_{h_1 \dots h_m} g^{n-1}_{k_1 \dots k_m} \quad \dots \quad (37),$$

$$g^n{}_{i_1 \dots i_m} = \sum_{j_1 \dots j_m} q^n{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} \quad \dots \quad (38)$$

nebst

$$p^n{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = 2^{\beta(i_1 j_1 \dots i_m j_m)} q^n{}_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} \quad \dots \quad (39).$$

In unseren Formeln ist natürlich der Fall des Monohybridismus ($m = 1$) mit einbegriffen. Man erhält aus (34), (35), (36) für $m = 1$, wobei wir statt i_1, j_1 einfach i, j schreiben:

$$p^1{}_{ij} = \frac{1}{2^{\gamma(ij)}} \sum_{(h\,k = i\,j)} g_h g_k = \frac{1}{2^{\gamma(ij)}} (g_i g_j + g_j g_i),$$

$$q^1{}_{ij} = {}^1/_2 (g_i g_j + g_j g_i) = g_i g_j, \qquad g^1{}_i = \sum_j q^1{}_{ij} = g_i \sum_j g_j = g_i$$

in Uebereinstimmung mit den Formeln in Abschnitt I (Nr. 4, 5 und 10).

16. Beispiel für $m = 2$ [35]). Zunächst ein Beispiel von Dihybridismus ($m = 2$), wobei der Einfachheit halber für jedes Merkmal nur zwei reinrassige Formen, also $r_1 = 2$ und $r_2 = 2$ angenommen werden mögen. Die einzelnen Biotypen werden gemäß Nr. 11 durch eine Formel $A^{(1)}_{i_1} A^{(1)}_{j_1} A^{(2)}_{i_2} A^{(2)}_{j_2}$ oder kürzer durch zwei Zahlenpaare (i_1, j_1; i_2, j_2) bezeichnet. Es gibt dann neun verschiedene Biotypen, die wir nach Schema (40) anschreiben wollen [36]).

$(11\ 11)_{[1]}$	$(11\ 12)_{[2]}$	$(11\ 22)_{[1]}$
$(12\ 11)_{[2]}$	$(12\ 12)_{[4]}$	$(12\ 22)_{[2]}$
$(22\ 11)_{[1]}$	$(22\ 12)_{[2]}$	$(22\ 22)_{[1]}$

(40).

[34]) Unter $g^0{}_{h_1 \dots h_m}$ ist sinngemäß $g_{h_1 \dots h_m}$ zu verstehen.

[35]) Die Zahlenrechnungen sind in den folgenden Beispielen zur Illustration unserer theoretischen Betrachtungen mit größerer Genauigkeit ausgeführt, als sie praktischen Fällen entsprechen dürfte.

[36]) Zur späteren Benutzung ist in eckigen Klammern jedem Typus der zugehörige Wert von $2^{\beta(i_1 j_1 i_2 j_2)}$ beigefügt, also $2^0 = 1$, $2^1 = 2$ oder $2^2 = 4$, je nachdem der Typus in keinem, einem oder beiden Merkmalen hybrid ist.

Setzen wir etwa den Fall, eine Population enthalte zunächst nur die in der ersten Vertikalreihe angegebenen Typen und zwar im Verhältnis $P_{11\,11} : P_{12\,11} : P_{22\,11} = 25 : 10 : 1$. Bezüglich des zweiten Merkmals ist die ganze Population reinrassig und es liegt also zunächst nicht Dihybridismus, sondern Monohybridismus vor, und zwar mit einem die Gleichgewichtsbedingungen erfüllenden Zahlenverhältnis (vgl. Nr. 8). Nunmehr trete aber (etwa durch Einwanderung) ein die vorhandene Population überwiegender Bestand von neuen Individuen hinzu, alle vom gleichen (reinrassigen) Typus (22 22), und in einer Stärke von 16:9 (= 0,64:0,36) im Vergleich zur schon vorhandenen Population. Das sei die Ausgangssituation! Was würde sich, wenn die Gleichmäßigkeitsvoraussetzungen (U) zutreffen, daraus entwickeln? Wir haben zunächst, in (41), die rPZ der F^0-Generation (gebildet von den nach der Invasion vorhandenen geschlechtsreifen Individuen) und in (42) die zugehörigen rPHZ [37]) (die Anordnung entspricht der von (40), also z. B. $p_{12\,11} = 0{,}10$, $q_{12\,11} = 0{,}05$). Gemäß (26) ist dann

0,25	0	0	
0,10	0	0	(41)
0,01	0	0,64	

0,25	0	0	
0,05	0	0	(42)
0,01	0	0,64	

$$g_{h_1 h_2} = \sum_{k_1 k_2} q_{h_1 k_1 h_2 k_2} = q_{h_1 1\, h_2 1} + q_{h_1 1\, h_2 2} + q_{h_1 2\, h_2 1} + q_{h_1 2\, h_2 2},$$

also, wie man hieraus ersieht, g_{11} gleich der Summe der in (42) links oben (umrahmt) stehenden Zahlen, g_{12} ebenso die Summe der rechts oben, g_{21} der links unten, g_{22} der rechts unten stehenden vier Zahlen. Man erhält so die Zahlentafel (43). Aus diesen rGZ erhält man weiter die rPHZ der F^1-Generation gemäß (35), also gemäß:

$$g_{11} = 0{,}3, \quad g_{12} = 0, \quad g_{21} = 0{,}06, \quad g_{22} = 0{,}64 \qquad (43)$$

$$q^1{}_{i_1 j_1\, i_2 j_2} = \frac{1}{2^2}\left(g_{i_1 i_2} g_{j_1 j_2} + g_{i_1 j_2} g_{j_1 i_2} + g_{j_1 i_2} g_{i_1 j_2} + g_{j_1 j_2} g_{i_1 i_2}\right)$$

somit:

$$q^1{}_{11\,11} = g_{11}\, g_{11}, \quad q^1{}_{11\,12} = g_{11}\, g_{12}, \quad q^1{}_{11\,22} = g_{12}\, g_{12},$$
$$q^1{}_{12\,11} = g_{11}\, g_{21}, \quad q^1{}_{12\,12} = {}^1/_2\,(g_{11}\, g_{22} + g_{12}\, g_{21}), \quad q^1{}_{12\,22} = g_{12}\, g_{22},$$
$$q^1{}_{22\,11} = g_{21}\, g_{21}, \quad q^1{}_{22\,12} = g_{21}\, g_{22}, \quad q^1{}_{22\,22} = g_{22}\, g_{22}.$$

Setzt man hier die Werte aus (43) ein, so erhält man für die $q^1{}_{i_1 j_1\, i_2 j_2}$ die Zahlentafel (42,1). Natürlich erhält man hieraus sofort die zugehörigen $p^1{}_{i_1 j_1\, i_2 j_2}$ durch Multiplikation mit den bezüglichen Faktoren 1, 2 oder 4 (vergl. Anm. 36, 37). Wir verzichten darauf, sie anzuschreiben, und wenden uns gleich zur Frage, wie sich die Verhältnisse in den späteren Generationen gestalten. Hierzu ist dasselbe Rechenverfahren, das von (42) über (43) zu (42,1) geführt hat, nur fortgesetzt zu wiederholen. Unter (43,1) sind die $g^1{}_{i_1 i_2}$ angegeben und die weiteren Zahlentafeln enthalten unter den Bezeichnungen (42,2), (43,2), . . ., (42,7) (43,7) für die 2. bis 7. Filialgeneration die rPHZ und rGZ.

Führt man die Rechnung weiter, so erhält man Werte, die sich immer mehr den in Zahlentafel $(42,\infty)$, $(43,\infty)$ angegebenen Werten annähern [38]). Wie man sieht, nähern sich die Verhältnisse nach der eingetretenen Invasion immer mehr einem neuen Gleichgewichts-

0,09	0	0	
0,018	0,096	0	(42,1)
0,0036	0,0384	0,4096	

0,204	0,096		
0,156	0,544		(43,1)

0,0416	0,0196	0,0092	
0,0318	0,0630	0,0522	(42,2)
0,0243	0,0849	0,2959	

0,156	0,144		
0,204	0,496		(43,2)

0,0243	0,0225	0,0207	
0,0318	0,0534	0,0714	(43,3)
0,0416	0,1012	0,2460	

0,132	0,168		
0,228	0,472		(43,3)

0,0174	0,0222	0,0282	
0,0301	0,0503	0,0793	(42,4)
0,0520	0,1076	0,2228	

0,120	0,180		
0,240	0,460		(43,4)

0,0144	0,0216	0,0324	
0,0288	0,0492	0,0828	(42,5)
0,0576	0,1104	0,2116	

0,114	0,186		
0,246	0,454		(43,5

0,0130	0,0212	0,0346	
0,0280	0,0488	0,0844	(42,6)
0,0605	0,1117	0,2061	

0,111	0,189		
0,249	0,451		(43,6)

0,0123	0,0210	0,0357	
0,0276	0,0486	0,0852	(42,7)
0,0620	0,1123	0,2034	

0,1095	0,1905		
0,2505	0,4495		(43,7)

[37]) Sie werden aus den rPZ erhalten durch Division mit den entsprechenden in (40) beigefügten Zahlen 1 bzw. 2 bzw. 4.

[38]) Wir kommen auf das Beispiel und insbesondere auf die Bestimmung dieser Grenzwerte direkt aus den rGZ der Ausgangs-Generation noch zurück.

zustand, der aber keineswegs zusammenfällt mit dem wahrscheinlichsten Zustand einer bestimmten Filialgeneration — also auch insbesondere nicht mit dem der F^1-Generation, wie es bei Monohybridismus

$$\begin{array}{lll} 0{,}0117 = 0{,}108 \cdot 0{,}108, & 0{,}0207 = 0{,}108 \cdot 0{,}192, & 0{,}0369 = 0{,}192 \cdot 0{,}192 \\ 0{,}0272 = 0{,}108 \cdot 0{,}252, & 0{,}0484 = 0{,}108 \cdot 0{,}448, & 0{,}0860 = 0{,}192 \cdot 0{,}448 \\ & = 0{,}192 \cdot 0{,}252, & \\ 0{,}0635 = 0{,}252 \cdot 0{,}252, & 0{,}1129 = 0{,}252 \cdot 0{,}448, & 0{,}2007 = 0{,}448 \cdot 0{,}448 \end{array} \qquad (42, \infty)$$

der Fall war. Weder die wahrscheinlichsten Werte der rGZ noch jene der rPHZ (und rPZ) sind von einer bestimmten Generation an exakt konstant.
(Praktisch wird man natürlich von Konstanz sprechen können, sobald die Abweichungen vom Gleichgewichtszustand kleiner geworden sind als die sowieso in jedem Einzelfall durch die Streuung bedingten Abweichungen von den wahrscheinlichsten Werten; vgl. Einleitung.)

$$\begin{array}{ll} 0{,}108 & 0{,}192 \\ 0{,}252 & 0{,}448 \end{array} \qquad (43, \infty)$$

Bemerkenswert ist, wie innerhalb der ursprünglich allein vorhandenen Typen (11 11), (12 11), (22 11) das Stärkeverhältnis in der F^1-Generation zwar noch dasselbe ist ($0{,}09 : 2 \cdot 0{,}018 : 0{,}0036 = 25 : 10 : 1$), unter dem Einfluß der Invasion aber von der F^2-Generation an sich zugunsten des ursprünglich nur schwach vertretenen (in der gesamten F^1-Population fast ganz zurückgetretenen) Typus (22 11) ändert, der schließlich mehr als das 5-fache des Typus (11 11) ausmacht. (Dabei findet in unserem Beispiel im Stärkeverhältnis dieser drei Typen beim Uebergang von F^2 zu F^3 genau Umkehrung statt.)

17. Beispiel für $m = 3$. Ein zweites Beispiel betreffe einen Fall mit $m = 3$ (Trihybridismus) und $r_1 = r_2 = r_3 = 2$. Analog wie im früheren Fall bezeichnen wir die Biotypen $A^{(1)}_{i_1} A^{(1)}_{j_1} A^{(2)}_{i_2} A^{(2)}_{j_2} A^{(3)}_{i_3} A^{(3)}_{j_3}$ vereinfacht durch 3 Zahlenpaare $(i_1\, j_1,\ i_2\, j_2,\ i_3\, j_3)$. Man hat hier 27 verschiedene Biotypen, die wir nach folgendem Schema anschreiben wollen: Zunächst mögen die in (44) angeschriebenen Typen kommen (1. Teil des Schema); dann als 2., bzw. 3. Teil des Schema je weitere 9 Typen, in einer analogen Zahlentafel wie (44), wobei nur statt des ersten Zahlenpaares 11 überall 12 bzw. 22 steht.

$$\begin{array}{lll} (11\ 11\ 11), & (11\ 11\ 12), & (11\ 11\ 22) \\ (11\ 12\ 11), & (11\ 12\ 12), & (11\ 12\ 22) \\ (11\ 22\ 11), & (11\ 22\ 12), & (11\ 22\ 22) \end{array} \qquad (44)$$

Die rPZ der Ausgangsgeneration seien folgendermaßen gegeben: für den 1. Teil des Schema und übereinstimmend damit für den 3. Teil des Schema durch Zahlentafel (45), für den 2. Teil des Schema durch Zahlen, doppelt so groß, wie die der Zahlentafel (45)[39]). Daraus erhält man für die rPHZ ein Schema, für das der 1., 2. und 3. Teil übereinstimmend durch Zahlentafel (46) gegeben ist.

$$\left.\begin{array}{lll} 0{,}09, & 0{,}02, & 0{,}00111\ (= 1/900) \\ 0{,}09, & 0{,}02, & 0{,}00111 \\ 0{,}0225, & 0{,}005, & 0{,}00028\ (= 1/3600) \end{array}\right\} \qquad (45)$$

$$\left.\begin{array}{lll} 0{,}09, & 0{,}01, & 0{,}00111\ (= 1/900) \\ 0{,}045, & 0{,}005, & 0{,}00056\ (= 1/1800) \\ 0{,}0225, & 0{,}0025, & 0{,}00028\ (= 1/3600) \end{array}\right\} \qquad (46)$$

Hieraus berechnen sich die rGZ gemäß (26) nach der Formel:

$$g_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{j_1 j_2 j_3} q_{i_1 j_1 i_2 j_2 i_3 j_3} = q_{i_1 1\, i_2 1\, i_3 1} + q_{i_1 1\, i_2 1\, i_3 2} + q_{i_1 1\, i_2 2\, i_3 1} + q_{i_1 1\, i_2 2\, i_3 2} + q_{i_1 2\, i_2 1\, i_3 1} + q_{i_1 2\, i_2 1\, i_3 2} + q_{i_1 2\, i_2 2\, i_3 1} + q_{i_1 2\, i_2 2\, i_3 2}.$$

Man erhält so die Zahlenwerte: $g_{111} = g_{211} = 0{,}3$, $g_{112} = g_{212} = 0{,}0333\ (= 1/30)$, $g_{121} = g_{221} = 0{,}15$, $g_{122} = g_{222} = 0{,}0167\ (= 1/60)$. Ferner hat man gemäß (35) für $q^1{}_{i_1 j_1 i_2 j_2 i_3 j_3}$ die Formel

$$\frac{1}{2^3} \sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g_{h_1 h_2 h_3} g_{k_1 k_2 k_3}$$

oder, wenn man die Summe ausschreibt und je zwei gleiche Summanden zusammenzieht:

$$q^1{}_{i_1 j_1 i_2 j_2 i_3 j_3} = 1/4\,(g_{i_1 i_2 i_3}\, g_{j_1 j_2 j_3} + g_{i_1 i_2 j_3}\, g_{j_1 j_2 i_3} + g_{i_1 j_2 i_3}\, g_{j_1 i_2 j_3} + g_{i_1 j_2 j_3}\, g_{j_1 i_2 i_3});$$

man erhält so für beliebige i_1, j_1:

$$q^1{}_{i_1 j_1 11\ 11} = 1/4\,(4\, g_{i_1 11}\, g_{j_1 11}) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09,$$

---

[39]) Es ist also z. B. $p_{11\,11\,11} = p_{22\,11\,11} = 0{,}09$, $p_{12\,11\,11} = 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}18$, $p_{11\,22\,12} = p_{22\,22\,12} = 0{,}005$, $p_{12\,22\,22} = 2 \cdot 0{,}00028 = 0{,}00056\ (= 1/1800)$.

ebenso (bei Beachtung der in unserem Beispiel geltenden Gleichungen $g_{j_1 11} = g_{i_1 11}$, $g_{j_1 12} = g_{i_1 12}$ usw.)

$$q^1{}_{i_1 j_1 12\,12} = {}^1/_4 (g_{i_1 11}\, g_{j_1 22} + g_{i_1 12}\, g_{j_1 21} + g_{i_1 21}\, g_{j_1 12} + g_{i_1 22}\, g_{j_1 11})$$
$$= {}^1/_4 (2 g_{i_1 11}\, g_{j_1 22} + 2 g_{i_1 12}\, g_{j_1 21}) = {}^1/_2 (0{,}3 \cdot {}^1/_{60} + {}^1/_{30} \cdot 0{,}15) = 0{,}005$$

usw. Rechnet man so alle Werte $q^1{}_{i_1 j_1 i_2 j_2 i_3 j_3}$ aus und trägt sie wieder in ein Schema ein, so findet man dieses mit dem Schema der ursprünglichen rPHZ übereinstimmend: es besteht wieder aus drei Teilen, jeder gleich (46). In unserem Beispiel bleiben also die rPHZ (daher auch die rPZ) beim Uebergang von der F^0- zur F^1-Generation und daher zu jeder späteren Filial-Generation konstant. Es liegt somit ein Beispiel ganz anderer Art vor, als das in Nr. 16 betrachtete, wo die Verhältnisse der Populationszahlen sich nur schrittweise gewissen Zahlenverhältnissen annäherten. Der Grund hierfür liegt in besonderen das Gleichgewicht bedingenden Beziehungen, denen die gegebenen rPZ genügen und auf die wir in Nr. 23, 24 zu sprechen kommen.

18. Relative Gametenzahlen verschiedener Ordnung. Die Feststellung der Bedingungen, unter welchen die rPZ von Generation zu Generation konstant bleiben, sowie der Gesetze, nach welchen sie sich in anderen Fällen ändern, erfordert eine genauere Untersuchung der Formel (36). Dabei erweist es sich als sachgemäß, für gewisse aus den rGZ $g_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ durch Summenbildungen gewonnene Zahlen besondere Bezeichnungen einzuführen. Wir setzen nämlich zunächst:

$$\sum_{i_1=1}^{r_1} g_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m} = g_{* i_2 i_3 \ldots i_m}, \quad \sum_{i_2=1}^{r_2} g_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m} = g_{i_1 * i_3 \ldots i_m}, \quad \ldots\ldots, \quad \sum_{i_m=1}^{r_m} g_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m} = g_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} *} \quad (47).$$

Sei z. B. $m = 4$ und $r_1 = 2$, so bedeutet $g_{* i_2 i_3 i_4} = \sum_{i_1=1}^{2} g_{i_1 i_2 i_3 i_4} = g_{1 i_2 i_3 i_4} + g_{2 i_2 i_3 i_4}$ den Bruchteil, den in der Gesamtheit aller von der F^0-Generation produzierten Gameten jene ausmachen, die entweder dem Typus $A_1^{(1)} A_{i_2}^{(2)} A_{i_3}^{(3)} A_{i_4}^{(4)}$ oder dem Typus $A_2^{(1)} A_{i_2}^{(2)} A_{i_3}^{(3)} A_{i_4}^{(4)}$ angehören, d. h. den Bruchteil aller jener Gameten, die — gleichgültig, welches der Erbfaktor $A_{i_1}^{(1)}$ bezüglich des ersten Merkmals ist, gekennzeichnet sind für das zweite bzw. dritte bzw. vierte Merkmal durch die Erbfaktoren $A_{i_2}^{(2)}$, $A_{i_3}^{(3)}$ und $A_{i_4}^{(4)}$. Ebenso allgemein für beliebiges m: Es gibt uns $g_{* i_2 i_3 \ldots i_m}$ den Bruchteil aus der Gesamtheit aller Gameten, den jene Teilgesamtheit bildet, die bezüglich des ersten Merkmals einen ganz beliebigen Erbfaktor hat, während die Erbfaktoren für die $(m-1)$ übrigen Merkmale vorgeschrieben sind. Das gleiche gilt von den übrigen Zahlen (47), nur daß immer wieder ein anderer Erbfaktor beliebig gelassen, die übrigen $m-1$ vorgeschrieben sind[40]). Mit Rücksicht auf die Anzahl der vorgeschriebenen Erbfaktoren nennen wir die Zahlen (47) relative Gametenzahlen $(m-1)$-ster Ordnung, also z. B. $g_{* i_2 i_3 i_4}$ oder $g_{i_1 * i_3 i_4}$ solche 3. Ordnung.

Dementsprechend haben wir unsere bisherigen rGZ $g_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ als solche m-ter Ordnung zu bezeichnen, da sie den Bruchteil einer Teilgesamtheit von Gameten angeben, die bezüglich aller m Merkmale einen vorgeschriebenen Erbfaktor haben.

Durch Summenbildungen über mehrere Indizes erhält man rGZ niedrigerer Ordnung, z. B. die folgenden rGZ $(m-2)$-ter Ordnung[41]):

$$\sum_{i_1 i_2} g_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=1}^{r_2} g_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m} = g_{* * i_3 \ldots i_m}.$$

Summiert man schließlich die Zahlen $g_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ über $(m-1)$ Indizes, d. h. über alle bis auf einen, so erhält man die rGZ 1 Ordnung[42]):

$$\sum_{i_2 i_3 \ldots i_m} g_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m} = g_{i_1 * * \ldots *}, \quad \sum_{i_1 i_3 \ldots i_m} g_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m} = g_{* i_2 * \ldots *}, \quad \ldots\ldots, \quad \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} g_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m} = g_{* * \ldots * i_m}.$$

---

[40]) So findet man im Beispiel Nr. 16 aus (43): $g_{1*} = g_{11} + g_{12} = 0{,}3$, $g_{2*} = g_{21} + g_{22} = 0{,}7$, $g_{*1} = g_{11} + g_{21} = 0{,}36$, $g_{*2} = g_{12} + g_{22} = 0{,}64$; im Beispiel Nr. 17: $g_{*21} = g_{121} + g_{221} = 0{,}3$, $g_{1*2} = g_{112} + g_{122} = 0{,}05$ usw.

[41]) So ist für das Beispiel Nr. 17 $g_{**1} = g_{111} + g_{121} + g_{211} + g_{221} = 0{,}9$; $g_{*2*} = g_{121} + g_{122} + g_{221} + g_{222} = {}^1/_3$; ebenso findet man $g_{1**} = g_{2**} = {}^1/_2$, $g_{*1*} = {}^2/_3$, $g_{**2} = 0{,}1$.

[42]) Im folgenden abgekürzt mit »rGZ 1. O« bezeichnet, analog mit »rGZ 2. O« jene 2. Ordnung usw.

Es ist bisweilen bequem, die Summe über alle Indizes, also $\sum_{i_1 i_2 \dots i_m} g_{i_1 i_2 \dots i_m}$ analog mit $g_{*\dots*}$ und als rGZ nullter Ordnung zu bezeichnen. Dabei ist aber einfach, wie Formel (27) zeigt:

$$g_{*\dots*} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

Sei noch hervorgehoben: Wenn eine rGZ 1. O, z. B. $g_{h_1 *\dots*} = \sum_{i_2 \dots i_m} g_{h_1 i_2 \dots i_m}$ den Wert null hat, dann müssen alle Summanden $g_{h_1 i_2 \dots i_m}$ für alle Werte $i_2, \dots, i_m$ null sein, d. h. wegen $g_{h_1 i_2 \dots i_m} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_m} q_{h_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m}$: es müssen alle Zahlen $q_{h_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m}$ und somit alle $p_{h_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_m j_m}$ für alle Werte $i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_m$ null sein, m. a. W. in der Population ist kein Biotypus (31) vertreten, für den i_1 den Wert h_1 hat, d. h. in dessen Formel der Erbfaktor $A^{(1)}_{h_1}$ vorkommt. Ist also z. B. $h_1 = r_1$, so heißt das, daß für das erste Merkmal der letzte (r_1-te) Erbfaktor gar nicht auftritt und wir es nur mit einem Erbfaktor weniger zu tun haben. Wenn wir also, wie natürlich, keine überzähligen Erbfaktoren mitzählen, so können wir sagen, daß alle rGZ 1. O von null verschiedene Werte haben.

Mit der gleichen Bedeutung, wie sie die eingeführten rGZ verschiedener Ordnung für die F^0-Generation haben, sollen rGZ verschiedener Ordnung für irgend eine spätere F^n-Generation eingeführt werden, wie $g^n_{* i_2 i_3 \dots i_m}, \dots, g^n_{* * \dots * i_m}$. Es sind das entsprechend gebildete Summen über Zahlen $g^n_{i_1 i_2 \dots i_m}$.

19. Rekursionsformeln für die relativen Gametenzahlen. Wir benutzen die neu eingeführten Zahlen zunächst, um Formel (36) etwas anders zu schreiben. Betrachten wir etwa den Fall $m = 2$. Dann wird (vgl. (33) — wie dort ohne Zusammenziehen gewisser paarweise wertegleicher, doch in der Faktorenreihenfolge verschiedener Summanden):

$$g^1{}_{i_1 i_2} = \frac{1}{2^2} \sum_{j_1 j_2} \sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g_{h_1 h_2} g_{k_1 k_2} = \frac{1}{2^2} \sum_{j_1 j_2} [g_{i_1 i_2} g_{j_1 j_2} + g_{i_1 j_2} g_{j_1 i_2} + g_{j_1 i_2} g_{i_1 j_2} + g_{j_1 j_2} g_{i_1 i_2}]$$

$$= \frac{1}{2^2} \left[g_{i_1 i_2} \sum_{j_1 j_2} g_{j_1 j_2} + \sum_{j_2} g_{i_1 j_2} \sum_{j_1} g_{j_1 i_2} + \sum_{j_1} g_{j_1 i_2} \sum_{j_2} g_{i_1 j_2} + \sum_{j_1 j_2} g_{j_1 j_2} g_{i_1 i_2} \right].$$

Beachtet man nun, daß $\sum_{j_1 j_2} g_{j_1 j_2} = g_{**} = 1$, ferner $\sum_{j_2} g_{i_1 j_2} = g_{i_1 *}$ und $\sum_{j_1} g_{j_1 i_2} = g_{* i_2}$ ist[43]), so erhält man

$$g^1{}_{i_1 i_2} = \frac{1}{2^2} [g_{i_1 i_2} g_{**} + g_{i_1 *} g_{* i_2} + g_{* i_2} g_{i_1 *} + g_{**} g_{i_1 i_2}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

Es steht also rechts in der Klammer eine Summe von $2^2 = 4$ Summanden, jeder Summand ist das Produkt zweier Zahlen g, bei welchen die Indizes aber zum Teil durch einen Stern (*) ersetzt sind; und zwar im besonderen so, daß sich die Indizes der beiden Faktoren gewissermaßen zum Indexpaar $(i_1 i_2)$ von $g^1{}_{i_1 i_2}$ ergänzen. Man kann das so schreiben:

$$g^1{}_{i_1 i_2} = \frac{1}{2^2} \sum_{(h_s k_s = i_s *)} g_{h_1 h_2} g_{k_1 k_2},$$

womit zum Ausdruck gebracht werden soll, daß in jedem Summanden $g_{h_1 h_2} g_{k_1 k_2}$ jedes der Zeichenpaare $(h_1 k_1)$ bzw. $(h_2 k_2)$ höchstens bis auf die Reihenfolge mit dem Zeichenpaar $(i_1 *)$ bzw. $(i_2 *)$ übereinstimmen soll und daß alle Summanden durch alle $2^2 = 4$ möglichen Umstellungen der Zeichen innerhalb der einzelnen Paare $(i_1 *)$, $(i_2 *)$ gewonnen werden.

Auf ganz dieselbe Weise überzeugt man sich, daß allgemein für beliebiges m gilt:

$$g^1{}_{i_1 \dots i_m} = \frac{1}{2^m} \sum_{(h_s k_s = i_s *)} g_{h_1 \dots h_m} g_{k_1 \dots k_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Dabei ist unter dem Symbol auf der rechten Seite dieser Gleichung eine Summe von lauter Ausdrücken der Gestalt $g_{h_1 \dots h_m} g_{k_1 \dots k_m}$ zu verstehen, die so zu bilden sind, daß jedes Zeichenpaar $h_s k_s$ höchstens bis auf die Reihenfolge mit dem Zeichenpaar $i_s *$ zusammenfällt, daß also entweder $h_1 = i_1$, $k_1 = *$ oder $h_1 = *$, $k_1 = i_1$ zu setzen ist, des-

---

[43]) Für den Wert einer Summe ist es gleichgültig, wie die Summationsbuchstaben heißen, es ist also z. B. sowohl $\sum_{j_2=1}^{2} g_{i_1 j_2}$ wie $\sum_{i_2=1}^{2} g_{i_1 i_2}$ nichts anderes als die Summe $g_{i_1 1} + g_{i_1 2}$.

gleichen entweder $h_2 = i_2$, $k_2 = *$ oder $h_2 = *$, $k_2 = i_2$ usw. Das gibt im ganzen 2^m Möglichkeiten, also 2^m Summanden[44]). Z. B. ist für $m = 3$ (die Summe wieder angeschrieben, wie sie so entsteht, ohne Zusammenziehen wertegleicher Summanden):

$$g^1{}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{2^3}\left[g_{i_1 i_2 i_3} g_{***} + g_{i_1 i_2 *} g_{** i_3} + g_{i_1 * i_3} g_{* i_2 *} + g_{i_1 ** } g_{* i_2 i_3}\right.$$
$$\left. + g_{* i_2 i_3} g_{i_1 **} + g_{* i_2 *} g_{i_1 * i_3} + g_{** i_3} g_{i_1 i_2 *} + g_{***} g_{i_1 i_2 i_3}\right] \quad (51).$$

20. Verallgemeinerung. Formel (50) gestattet, aus den rGZ m-ter O für eine Generation (F^0-Generation) jene der nächsten Generation (F^1-Generation) zu berechnen. Diese Formel ist nur ein Spezialfall einer allgemeineren Regel, die dasselbe für rGZ beliebiger, auch niedrigerer Ordnung leistet. Sei etwa — unter f irgend eine Zahl der Reihe $1, 2, .., m$ verstanden — eine rGZ der F^1-Generation von der Ordnung f betrachtet, bei welcher also, wie z. B. bei $g^1{}_{i_1 .. i_f * .. *}$ von den m Plätzen für Indizes f Plätze mit wirklichen Indizes i besetzt sind, während auf den übrigen $(m-f)$ Plätzen ein Stern $*$ steht. Dann gilt, wovon wir uns sogleich noch näher überzeugen werden:

$$g^1{}_{i_1 .. i_f * .. *} = \frac{1}{2f} \sum_{(h_s k_s = i_s *)} g_{h_1 .. h_f * .. *} g_{k_1 .. k_f * .. *} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Dabei bedeutet das Symbol rechts eine Summe von lauter Ausdrücken der Gestalt $g_{h_1 .. h_f * .. *} g_{k_1 .. k_f * .. *}$, die so zu bilden sind, daß jedes der Zeichenpaare $h_s k_s$ (für $s = 1, 2,$ usw. bis f) — höchstens bis auf die Reihenfolge — mit dem Zeichenpaar $i_s *$ übereinstimmt, also entweder $h_s = i_s$, $k_s = *$ oder $h_s = *$, $k_s = i_s$ zu setzen ist. Da man für jedes der f Zeichenpaare $h_s k_s$ die Wahl zwischen 2 Möglichkeiten hat, gibt das im ganzen 2^f Möglichkeiten, also 2^f Summanden. Es ist also z. B. (für $m = 3$, $f = 2$):

$$g^1{}_{i_1 i_2 *} = \frac{1}{2^2} \sum_{(h_s k_s = i_s *)} g_{h_1 h_2 *} g_{k_1 k_2 *} = \frac{1}{2^2}\left[g_{i_1 i_2 *} g_{***} + g_{i_1 ** } g_{* i_2 *} + g_{* i_2 *} g_{i_1 ** } + g_{***} g_{i_1 i_2 *}\right] \quad (53).$$

Wir können das in die Regel fassen: Eine rGZ f-ter O für die F^1-Generation ist gleich $\frac{1}{2^f}$ mal einer Summe von 2^f Summanden, jeder Summand ist ein Produkt von zwei rGZ der F^0-Generation, und zwar, wie wir wieder kurz sagen können, mit Indizes, die sich zusammen zu den f Indizes der gesuchten rGZ ergänzen: an jedem Platz, wo die gesuchte rGZ für die F^1-Generation einen Stern $*$ hat, haben auch beide Faktoren eines jeden Summanden einen Stern; an jedem Platz, wo die gesuchte rGZ einen wirklichen Index i hat, hat der eine der beiden Faktoren des Summanden eben diesen Index, der andere einen Stern.

Und diese Regel gilt nicht nur, wie für den (durch Formel (52) dargestellten) Fall, daß gerade die ersten f Indexplätze mit Indizes i, die letzten mit Sternen $*$ besetzt sind, sondern allgemein. Nach dieser Regel ist also z. B.:

$$g^1{}_{i_1 * i_3 *} = \frac{1}{2^2} \sum_{(h_s k_s = i_s *)} g_{h_1 * h_3 *} g_{k_1 * k_3 *} = \frac{1}{2^2}\left(g_{i_1 * i_3 *} g_{****} + g_{i_1 *** } g_{** i_3 *} + g_{** i_3 *} g_{i_1 *** } + g_{****} g_{i_1 * i_3 *}\right).$$

Die Richtigkeit dieser Regel ist aus der Definition der rGZ niedrigerer Ordnung, also z. B. $g^1{}_{i_1 .. i_f * .. *} = \sum_{i_{f+1}, i_{f+2}, .. i_m} g^1{}_{i_1 .. i_f i_{f+1} i_{f+2} .. i_m}$ zusammen mit Formel (50) unschwer zu erkennen. Es möge genügen, dies an einigen Beispielen zu zeigen. Sei zunächst $m = 2$. Wir wollen $g^1{}_{i_1 *}$ und $g^1{}_{* i_2}$ berechnen. Beachten wir $\sum_{i_2} g_{i_1 i_2} = g_{i_1 *}$ und $\sum_{i_2} g_{* i_2} = \sum_{i_2}\left(\sum_{i_1} g_{i_1 i_2}\right) = \sum_{i_1 i_2} g_{i_1 i_2} = g_{**}$, so erhalten wir, indem wir Gleichung (49) über alle Werte i_2 (von 1 bis r_2) summieren:

$$g^1{}_{i_1 *} = \sum_{i_2} g^1{}_{i_1 i_2} = \frac{1}{2^2}\left[g_{i_1 *} g_{**} + g_{i_1 *} g_{**} + g_{**} g_{i_1 *} + g_{**} g_{i_1 *}\right],$$

also nach Zusammenziehung jener Summanden, die gleich sind auch bezüglich der Reihenfolge ihrer Faktoren:

$$g^1{}_{i_1 *} = {}^1/_2\left[g_{i_1 *} g_{**} + g_{**} g_{i_1 *}\right].$$

---

[44]) Für $m = 1$ gibt Formel (50) einfach: $g^1{}_{i_1} = {}^1/_2\left[g_{i_1} g_* + g_* g_{i_1}\right]$, also wegen $g_* = 1$ (vgl. (48)): $g^1{}_{i_1} = g_{i_1}$, somit die schon in Nr. 5 und 10 festgestellte Konstanz der rGZ bei Monohybridismus.

Genau das gleiche liefert aber obige Regel: Es ist $f = 1$, man hat $2^f = 2$ Summanden und in jedem Summanden ergänzen sich die Indizes (es ist nur der eine i_1 da) gerade zu dem am gleichen Platz (an erster Stelle) befindlichen Index von $g^1{}_{i_1 *}$. Ganz ebenso liefert Summierung von (49) über alle Werte i_1 (von 1 bis r_1) nach analoger Ausrechnung:

$$g^1{}_{* i_2} = \sum_{i_1} g^1{}_{i_1 i_2} = {}^1/_2 \left[g_{* i_2} g_{**} + g_{**} g_{* i_2}\right],$$

wieder in Uebereinstimmung mit unserer Regel. Sei etwa noch Formel (53) bestätigt. Um $g^1{}_{i_1 i_2 *}$ zu finden, hat man (51) über alle Werte von i_3 zu summieren:

$$\begin{aligned} g^1{}_{i_1 i_2 *} = \sum_{i_3} g^1{}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{2^3} \Big[&\Big(\sum_{i_3} g_{i_1 i_2 i_3}\Big) g_{***} + g_{i_1 i_2 *} \sum_{i_3} g_{** i_3} \\ &+ \Big(\sum_{i_3} g_{i_1 * i_3}\Big) g_{* i_2 *} + g_{i_1 **} \sum_{i_3} g_{* i_2 i_3} + \Big(\sum_{i_3} g_{* i_2 i_3}\Big) g_{i_1 **} \\ &+ g_{* i_2 *} \sum_{i_3} g_{i_1 * i_3} + \Big(\sum_{i_3} g_{** i_3}\Big) g_{i_1 i_2 *} + g_{***} \sum_{i_3} g_{i_1 i_2 i_3} \Big] \\ = \frac{1}{2^3} \big[&2 g_{i_1 i_2 *} g_{***} + 2 g_{i_1 **} g_{* i_2 *} + 2 g_{* i_2 *} g_{i_1 **} + 2 g_{***} g_{i_1 i_2 *} \big], \end{aligned}$$

also nach Kürzen durch 2 übereinstimmend mit (53).

21. Konstanz der relativen Gametenzahlen erster Ordnung. Formel (52) bzw. unsere Regel wird besonders einfach für die rGZ 1. O, d. h. für $f = 1$. Dann wird

$$\begin{aligned} g^1{}_{i_1 * * \ldots *} &= {}^1/_2 \left[g_{i_1 * * \ldots *} g_{* * * \ldots *} + g_{* * * \ldots *} g_{i_1 * * \ldots *}\right] \\ \text{und analog} \quad g^1{}_{* i_2 * \ldots *} &= {}^1/_2 \left[g_{* i_2 * \ldots *} g_{* * * \ldots *} + g_{* * * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *}\right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^1{}_{* * \ldots * i_m} &= {}^1/_2 \left[g_{* * \ldots * i_m} g_{* * \ldots * *} + g_{* * \ldots * *} g_{* * \ldots * i_m}\right], \end{aligned}$$

woraus wegen (48) ohne weiteres folgt:

$$\begin{aligned} g^1{}_{i_1 * * \ldots *} &= g_{i_1 * * \ldots *}, \\ g^1{}_{* i_2 * \ldots *} &= g_{* i_2 * \ldots *}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ g^1{}_{* * \ldots * i_m} &= g_{* * \ldots * i_m}. \end{aligned}$$

Es ändern sich also die rGZ 1. O nicht beim Uebergang von der F^0- zur F^1-Generation, daher auch nicht beim Uebergang von der F^1- zur F^2-Generation, und überhaupt zu jeder folgenden F^n-Generation (Satz von der Konstanz der relativen Gametenzahlen erster Ordnung):

$$\begin{aligned} g_{i_1 * * \ldots *} &= g^1{}_{i_1 * * \ldots *} = g^2{}_{i_1 * * \ldots *} = \ldots = g^n{}_{i_1 * * \ldots *} = \ldots \\ g_{* i_2 * \ldots *} &= g^1{}_{* i_2 * \ldots *} = g^2{}_{* i_2 * \ldots *} = \ldots = g^n{}_{* i_2 * \ldots *} = \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{* * \ldots * i_m} &= g^1{}_{* * \ldots * i_m} = g^2{}_{* * \ldots * i_m} = \ldots = g^n{}_{* * \ldots * i_m} = \ldots \end{aligned}$$

So erhält man im Beispiel Nr. 16 aus (43), (43, 1), (43, 2) usw.: $g_{1 *} = 0{,}3 + 0$, $g^1{}_{1 *} = 0{,}204 + 0{,}096$, $g^2{}_{1 *} = 0{,}156 + 0{,}144$ usw. alle $g^n{}_{1 *} = 0{,}3$; und entsprechend ist für jedes n: $g^n{}_{2 *} = 0{,}7$, $g^n{}_{* 1} = 0{,}36$, $g^n{}_{* 2} = 0{,}64$.

Beiläufig sei beigefügt, daß im Fall des Monohybridismus rGZ von höherer als erster Ordnung überhaupt nicht auftreten. Der Satz von der Konstanz der rGZ 1. O wird hier: $g_i = g^1{}_i = g^2{}_i = \ldots$ und fällt mit dem in Nr. 5 bzw. Nr. 10 aufgestellten Satz von der Konstanz der rGZ zusammen.

22. Konstanzbedingungen für die relativen Gametenzahlen höherer Ordnung. Nicht so einfach liegen die Verhältnisse für die rGZ höherer Ordnung. Denn eine rGZ f-ter Ordnung, wie z. B. $g_{i_1 \ldots i_f * \ldots *}$, bleibt für $f \geqq 2$ im allgemeinen nicht konstant (vergl. in Nr. 16 die wechselnden Werte der $g_{i_1 i_2}$ in den Zahlentafeln (43), (43, 1), (43, 2) usw.). Vielmehr besteht die Konstanz aller rGZ jedweder Ordnung dann und nur dann, wenn jede rGZ m-ter Ordnung $g_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ gleich dem Produkt $g_{i_1 * * \ldots *} \cdot g_{* i_2 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g_{* * \ldots * i_m}$ ist, d. h. gleich dem Produkt derjenigen rGZ 1. O, deren Indizes sich zur Indexreihe von $g_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ ergänzen (es möge kurz das »entsprechende Produkt von rGZ 1. O« heißen).

Wir wollen das beweisen und fragen zunächst, wann eine rGZ 2. O, wie z. B. $g_{i_1 i_2 * \ldots *}$, beim Uebergang zur F^1-Generation konstant bleibt, d. h. wann $g^1{}_{i_1 i_2 * \ldots *}$

$= g_{i_1 i_2 * \ldots *}$ ist. Nun ist nach der Regel von Nr. 20 bezw. gemäß Formel (52) unter Beachtung von (48):

$$g^1{}_{i_1 i_2 * \ldots *} = \frac{1}{2^2}(g_{i_1 i_2 * \ldots *} g_{*** \ldots *} + g_{i_1 ** \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} + g_{* i_2 * \ldots *} g_{i_1 ** \ldots *} + g_{*** \ldots *} g_{i_1 i_2 * \ldots *}) = {}^1/_2 g_{i_1 i_2 * \ldots *} + {}^1/_2 g_{i_1 ** \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} \quad (54).$$

Soll nun $g^1{}_{i_1 i_2 * \ldots *} = g_{i_1 i_2 * \ldots *}$ sein, so ist das, wie man sieht, dann und nur dann der Fall, wenn

$$g_{i_1 i_2 * \ldots *} = g_{i_1 ** \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} \quad (55),$$

wenn also, wie wir wieder kurz sagen, $g_{i_1 i_2 * \ldots *}$ gleich dem entsprechenden Produkt von rGZ 1. O ist. Wenn (55) besteht, wollen wir sagen, $g_{i_1 i_2 * \ldots *}$ habe seinen »Gleichgewichtswert«.

Wir wollen nunmehr annehmen, wir hätten einen Fall, in dem alle rGZ 2. O ihre Gleichgewichtswerte haben, und wollen fragen, wann dann eine rGZ 3. O, wie z. B. $g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *}$, beim Uebergang zur F^1-Generation konstant bleibt, also $g^1{}_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} = g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *}$ ist. Nun ist nach der Regel von Nr. 20 bezw. gemäß (52):

$$g^1{}_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} = \frac{1}{2^3}(g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} g_{*** \ldots *} + g_{i_1 i_2 ** \ldots *} g_{** i_3 * \ldots *} + g_{i_1 * i_3 * \ldots *} g_{* i_2 ** \ldots *} + g_{i_1 ** \ldots *} g_{* i_2 i_3 * \ldots *} + g_{* i_2 i_3 * \ldots *} g_{i_1 ** \ldots *} + g_{* i_2 * \ldots *} g_{i_1 * i_3 * \ldots *} + g_{** i_3 * \ldots *} g_{i_1 i_2 * \ldots *} + g_{*** \ldots *} g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} \quad (56).$$

Hier sehen wir: die Summe in der Klammer enthält 2 Summanden, die — wegen (48) — gleich $g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *}$ sind, während jeder der übrigen $6 = 2^3 - 2$ Summanden ein Produkt einer rGZ 1. O mit einer rGZ 2. O ist; und jedes dieser Produkte wird, wenn man für die rGZ 2. O nach (55) ihren Gleichgewichtswert einsetzt, gleich

$$g_{i_1 ** \ldots *} \cdot g_{* i_2 * \ldots *} \cdot g_{** i_3 * \ldots *}.$$

Setzen wir also ein, so können wir statt (56) auch schreiben:

$$g^1{}_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} = \frac{1}{2^2} g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} + \frac{3}{2^2} g_{i_1 ** \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} g_{** i_3 * \ldots *}.$$

Soll nun $g^1{}_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} = g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *}$ sein, so ist das offenbar dann und nur dann der Fall, wenn $g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *}$ gleich $g_{i_1 ** \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} g_{** i_3 * \ldots *}$, d. h. gleich dem entsprechenden Produkt von rGZ 1. O ist. Diesen Wert wollen wir wieder den »Gleichgewichtswert« von $g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *}$ nennen.

Und so kann man fortschließen. Hat man nämlich etwa für die rGZ bis zur Ordnung $f-1$ einschließlich bewiesen, daß sie beim Uebergang zur F^1-Generation dann und nur dann konstant bleiben, wenn sie gleich dem entsprechenden Produkt von rGZ 1. O sind, so kann man wieder fragen, wann außer allen rGZ bis zur Ordnung $f-1$ auch noch eine bestimmte rGZ der Ordnung f, etwa $g_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *}$, konstant bleibt. Man hat dann die Formel (52) von Nr. 20 heranzuziehen und sieht: In der Summe auf der rechten Seite finden sich 2 Summanden, die (abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren) gleich $g_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *} g_{** \ldots **} = g_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *}$ sind, während jeder der übrigen $2^f - 2$ Summanden ein Produkt von zwei rGZ ist, die beide von niedrigerer Ordnung als f, also höchstens von der Ordnung $f-1$ sind; und wenn man für jeden der beiden Faktoren seinen Gleichgewichtswert einsetzt, so wird jeder dieser Summanden gleich dem Produkt

$$g_{i_1 * \ldots *} \cdot g_{* i_2 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g_{* \ldots * i_f * \ldots *} \quad (57).$$

Nach Einsetzen dieser Gleichgewichtswerte hat man also

$$g^1{}_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *} = \frac{1}{2^f}[2 g_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *} + (2^f - 2) g_{i_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * i_f * \ldots *}].$$

Soll nun $g^1{}_{i_1 \ldots i_f * \ldots *} = g_{i_1 \ldots i_f * \ldots *}$ sein, so ist das wieder dann und nur dann der Fall, wenn

$$g_{i_1 i_2 \ldots i_{f-1} i_f * \ldots *} = g_{i_1 * \ldots *} \cdot g_{* i_2 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g_{* \ldots * i_{f-1} ** \ldots *} \cdot g_{* \ldots ** i_f * \ldots *} \quad (58),$$

d. h. wenn $g_{i_1 \ldots i_f * \ldots *}$ gleich dem entsprechenden Produkt von rGZ 1. O ist, und dieser Wert soll wieder der Gleichgewichtswert von $g_{i_1 \ldots i_f * \ldots *}$ heißen.

Da man diesen Schluß bis zur höchstmöglichen, nämlich $m$ten Ordnung der rGZ fortsetzen kann, so ist gezeigt: Die Gesamtheit aller rGZ bis zur $m$ten Ordnung einschl. bleibt dann und nur dann beim Uebergang zur F^1-Generation konstant, wenn alle rGZ (jeder Ordnung) gleich ihren aus den rGZ 1. O berechneten »Gleichgewichtswerten« sind, d. h. gleich den »entsprechenden« Produkten von rGZ 1. O. Da man aber leicht sieht, daß, wenn alle rGZ einer bestimmten Ordnung f ihre Gleichgewichtswerte haben, dies dann von selbst[45]) auch für alle von der Ordnung $f-1$ und daher überhaupt für alle niedrigeren Ordnungen gilt, so genügt die Feststellung, daß alle rGZ höchster, nämlich $m$ter Ordnung ihre Gleichgewichtswerte haben, um schon sagen zu können, daß dies für alle Ordnungen überhaupt gilt. Es ist also das Bestehen der Gleichungen

$$g_{i_1 i_2 \ldots i_m} = g_{i_1 * \ldots *} \cdot g_{* i_2 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g_{* \ldots * i_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

(für alle in Betracht kommenden Werte von $i_1, i_2, \ldots, i_m$) in der Tat für die Konstanz aller rGZ jedweder Ordnung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, unsere Behauptung eingangs dieser Nr. also bewiesen.

23. Gleichgewichtsbedingungen einer Population. Es ist nun nicht schwer, die Frage zu beantworten, wann die rPZ beim Uebergang von einer Generation zur nächsten sich nicht ändern. Zunächst ist klar: Sollen die rPZ $p_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ und damit auch die rPHZ $q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ der F^0-Generation mit ihren Werten für die F^1-Generation übereinstimmen, so muß das sicherlich auch für die rGZ $g_{i_1 \ldots i_m}$ der Fall sein, die ja vermöge (26) durch die rPHZ mitgegeben sind. Es ist also jedenfalls notwendig, daß die in Nr. 22 abgeleiteten Konstanzbedingungen für die rGZ, d. h. die Gleichungen (59) sämtlich erfüllt sind, und wir haben nur zu fragen, was darüber hinaus nötig ist, damit auch die rPHZ konstant bleiben, d. h. damit für alle Werte von $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m$ durchgehends

$$q^1{}_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} = q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

gilt. Setzen wir nun (59) als erfüllt voraus, so können wir Formel (35), indem wir $g_{h_1 \ldots h_m}$ und $g_{k_1 \ldots k_m}$ durch ihre Gleichgewichtswerte ersetzen, auch so schreiben:

$$q^1{}_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} = \frac{1}{2^m} \sum_{(h_s k_s = i_s j_s)} g_{h_1 * \ldots *} g_{* h_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * h_m} \cdot g_{k_1 * \ldots *} g_{* k_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * k_m}.$$

In der Summe rechts sind nun aber alle 2^m Summanden (bis auf die Reihenfolge ihrer Faktoren) einander gleich; denn da entweder $h_1 = i_1$, $k_1 = j_1$ oder $h_1 = j_1$, $k_1 = i_1$ ist, so ist sicher stets $g_{h_1 * \ldots *} g_{k_1 * \ldots *} = g_{i_1 * \ldots *} g_{j_1 * \ldots *}$; ganz ebenso aber ist stets $g_{* h_2 * \ldots *} g_{* k_2 * \ldots *} = g_{* i_2 * \ldots *} g_{* k_2 * \ldots *}$ usw., somit jeder Summand gleich dem Produkt

$$g_{i_1 * \ldots *} g_{j_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} g_{* j_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * i_m} g_{* \ldots * j_m} \quad \ldots\ldots \quad (61),$$

daher die mit $\frac{1}{2^m}$ multiplizierte Summe dieser 2^m einander gleichen Summanden selbst gleich dem Produkt (61). Also ist (61) der Wert von $q^1{}_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ und daher, wenn (60) bestehen soll, auch der von $q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$; also haben wir: Konstanz der rPHZ kann sicher nur bestehen, wenn (für alle Werte von $i_1, j_1 \ldots, i_m, j_m$) die Gleichungen erfüllt sind:

$$g_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m} = g_{i_1 * \ldots *} g_{j_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} g_{* j_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * i_m} g_{* \ldots * j_m} \quad (62).$$

Diese Gleichungen (62) sind aber nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, damit die rPHZ konstant bleiben. Werden sie nämlich als erfüllt vorausgesetzt, so folgt daraus, indem man (62) auf beiden Seiten über alle Indizes $j_1, j_2 \ldots j_m$ summiert:

$$g_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_m} q_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m} = g_{i_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * i_m}$$

---

[45]) Wird nämlich (58) als gültig vorausgesetzt und summiert man links und rechts über irgend einen Index, z. B. über i_f, so folgt

$$g_{i_1 \ldots i_{f-1} * * \ldots *} = \sum_{i_f} g_{i_1 \ldots i_{f-1} i_f * \ldots *} = \sum_{i_f} g_{i_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * i_{f-1} * * \ldots *} g_{* \ldots * i_f * \ldots *},$$

also $= g_{i_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * i_{f-1} * \ldots *}$, da $\sum_{i_f} g_{* \ldots * i_f * \ldots *} = g_{* \ldots * * *} = 1$ ist.

(denn es ist ja $\sum_{j_1} g_{j_1 * \ldots *} = g_{** \ldots *} = 1$, ebenso $\sum_{j_2} g_{*j_2 * \ldots *} = 1$ usw.); es haben also die rGZ ihre Gleichgewichtswerte, woraus wieder nach der eben angestellten Rechnung folgt, daß $q^1{}_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ gleich dem Produkt (61), also nach Voraussetzung $= q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ ist, und die rPHZ bleiben also tatsächlich konstant, wie behauptet. Wir wollen für jede rPHZ $q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ den Wert (61) den zum vorliegenden System von rGZ 1. O gehörigen »Gleichgewichtswert« der rPHZ $q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ nennen. (Entsprechend heißen dann die zu diesen Werten der rPHZ gehörigen Werte der rPZ (vgl. Nr. 12):

$$p_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} = 2^{\beta(i_1 j_1 \ldots i_m j_m)} g_{i_1 * \ldots *} g_{j_1 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * i_m} g_{* \ldots * j_m} \quad . \quad . \quad (63)$$

die »Gleichgewichtswerte« dieser letzteren.)

Da man, wenn für eine Population die rPHZ $q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ bekannt sind, daraus die rGZ 1. O und damit die Gleichgewichtswerte der rPHZ berechnen kann, so kann man sich auf diese Weise sofort überzeugen, ob die Gleichgewichts-(Konstanz-)Bedingungen (62) erfüllt sind oder nicht.

Betrachten wir darauf hin unsere früheren Beispiele. Für das erstere (Nr. 16) war (vgl. Anm. [40])) $g_{1*} = 0{,}3$, $g_{2*} = 0{,}7$ $g_{*1} = 0{,}36$, $g_{*2} = 0{,}64$; rechnet man aber mit Hilfe dieser Zahlen die zugehörigen Gleichgewichtswerte der rPHZ, so erhält man ein von (42) verschiedenes Schema, da z. B. $q_{12\,11} = 0{,}05$ ist, während der Gleichgewichtswert $g_{1*} g_{2*} g_{*1} g_{*1} = 0{,}0272 \ldots$ wäre. Tatsächlich haben wir gesehen, daß die rPHZ sich beim Uebergang zur F^1-Generation ändern. Rechnet man hingegen im Beispiel von Nr. 17 aus den rGZ 1. O (vgl. Anm. [41])) die zugehörigen Gleichgewichtswerte der rPHZ, so erhält man gerade die Werte, wie sie in Zahlentafel (46) angegeben sind, z. B. $q_{11\,12\,12} = g_{1**} g_{1**} g_{*1*} g_{*2*} g_{**1} g_{**2} = {}^1/_2 \cdot {}^1/_2 \cdot {}^2/_3 \cdot {}^1/_3 \cdot {}^9/_{10} \cdot {}^1/_{10} = 0{,}005$.

Im Falle des Monohybridismus wird aus (62) einfach: $q_{i_1 j_1} = g_{i_1} g_{j_1}$ in Uebereinstimmung mit Nr. 10 bezw. (13) in Nr. 7.

Aus (62) läßt sich die bemerkenswerte Feststellung gewinnen, daß in einer im Gleichgewicht befindlichen Population, für welche die Voraussetzungen (U) zutreffen, alle (heterozygoten wie homozygoten) Biotypen vertreten sein müssen (natürlich unter Umständen zu einem sehr geringen Bruchteil), die bei den in der Population vorkommenden Erbfaktoren überhaupt möglich sind. Denn wenn keine überzähligen — in der Population gar nicht vorkommenden — Erbfaktoren mitgezählt werden, sind alle rGZ 1. O von Null verschieden (vgl. Nr. 18) und wegen (62) sind es dann auch alle $q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ und somit auch alle $p_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$.

24. Umformung der Gleichgewichtsbedingungen. Man kann die hergeleiteten Konstanzbedingungen (62) noch so umformen, daß sie nur Beziehungen zwischen den rPHZ bzw. PHZ darstellen. Zunächst folgt aus (62), daß für beliebige Indexpaare $i_1 j_1 \ldots, i_m j_m$ gelten muß:

$$(q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m})^2 = q_{i_1 i_1 \ldots i_m i_m} q_{j_1 j_1 \ldots j_m j_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64);$$

denn Einsetzen aus (62) gibt links und rechts dasselbe Produkt von rGZ 1. O. Rechts stehen rPHZ für in allen Merkmalen reinrassige (homozygote) Typen; aus diesen rPHZ lassen sich also in einem Gleichgewichtszustand bei Bestehen der Voraussetzungen (U) die übrigen rPHZ, d. h. alle jene der heterozygoten Typen berechnen. Außerdem müssen, wie man wieder durch Einsetzen aus (62) bestätigt, zwischen den rPHZ der homozygoten Typen selbst die Beziehungen bestehen:

$$q_{i_1 i_1 \ldots i_m i_m} q_{j_1 j_1 \ldots j_m j_m} = q_{h_1 h_1 \ldots h_m h_m} q_{k_1 k_1 \ldots k_m k_m} \text{ für } (h_s k_s) = (i_s j_s) \quad . \quad (65);$$

»für $(h_s k_s) = (i_s j_s)$«, d. h. allemal, wenn jedes der Zahlenpaare $(h_s k_s)$ höchstens bis auf die Reihenfolge mit dem Zahlenpaar $(i_s j_s)$ übereinstimmt. Es gilt also z. B. für Trihybridismus notwendig bei Gleichgewicht: $q_{11\,11\,11} q_{22\,22\,11} = q_{11\,22\,11} q_{22\,11\,11}$, desgleichen: $q_{11\,11\,11} q_{22\,22\,22} = q_{11\,11\,22} q_{22\,22\,11} = q_{11\,22\,11} q_{22\,11\,22} = q_{11\,22\,22} q_{22\,11\,11}$.

Man kann auch umgekehrt, was wir Kürze halber nicht weiter ausführen, zeigen, daß, wenn die Gleichungen (64) und (65) sämtlich erfüllt sind, dann auch die Gleichungen (62) gelten und also Gleichgewicht vorliegt. Hierbei sei erwähnt, daß die Gleichungen (65) nicht unabhängig voneinander sind: das Erfülltsein eines Teiles der Gleichungen zieht das Erfülltsein der übrigen nach sich. Uebrigens sind sowohl (64) als (65) nur spezielle Fälle der folgenden bei Gleichgewicht bestehenden Gleichungen:

$$q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} q_{h_1 k_1 \ldots h_m k_m} = q_{t_1 u_1 \ldots t_m u_m} q_{v_1 w_1 \ldots v_m w_m} \text{ für } (i_s j_s h_s k_s) = (t_s u_s v_s w_s),$$

d. h. wenn jedes Zahlenquadrupel t, u, v, w höchstens bis auf die Reihenfolge mit dem Quadrupel i, j, h, k übereinstimmt.

Wie eine nähere Ueberlegung zeigt, gestatten die Gleichungen (64), (65) für eine im Gleichgewicht befindliche Population unter den Voraussetzungen (U) aus

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \ldots + (r_m - 1)$$

geeignet ausgewählten rPHZ (bzw. rPZ) alle übrigen zu berechnen, desgleichen allgemeiner aus ebensoviel geeigneten Summen dieser Zahlen. Summen von rPZ stehen z. B. zur Verfügung, wenn Dominanz von Merkmalen auftritt und mehrere Biotypen den gleichen Phänotypus darstellen. Für $m = 1$, $r = 2$ braucht z. B. (wegen $r_1 - 1 = 1$) nur eine Zahl bekannt zu sein, um alle rPZ zu berechnen (vgl. Beispiel Nr. 9, wo die Summe $p_{11} + p_{12}$ gegeben war: $= (P_{11} + P_{12}) : P = P_{1*} : (P_{1*} + P_{22}) = {}^{80}/_{81}$).

Im Falle des Monohybridismus werden die Gleichungen (65) nichtssagend, da linke und rechte Seite identisch werden; und aus (64) wird $(q_{i_1 j_1})^2 = q_{i_1 i_1} q_{j_1 j_1}$ in Uebereinstimmung mit den Konstanzbedingungen in Nr. 10 bzw. mit (14) in Nr. 7.

In den Gleichungen (64), (65) kann man, ohne an ihrer Bedeutung etwas zu ändern, die rPHZ $q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ usw. durch die ihnen proportionalen PHZ $Q_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ usw. ersetzen.

25. Abweichungen vom Gleichgewicht bei beliebiger Ausgangs-Verteilung. Wir haben gesehen, daß in einer panmiktisch sich vermehrenden Population bei einer beliebigen Verteilung auf die einzelnen Biotypen die Zahlenverhältnisse der Ausgangs-Generation im allgemeinen in den späteren Generationen nicht erhalten bleiben, daß dies vielmehr nur dann der Fall ist, wenn diese Zahlenverhältnisse gewissen »Gleichgewichtsbedingungen« genügen. Wir gehen nunmehr über zur Frage, was aus einer beliebigen Ausgangssituation im Laufe der Generationen wird. Wir wollen zeigen, daß sich die rPZ dann gewissen Grenzwerten nähern, und zwar solchen, die ihrerseits den Gleichgewichtsbedingungen genügen, und daß diese Grenzwerte sich unmittelbar aus den gegebenen rPZ und zwar mittels der rGZ 1. O berechnen lassen. Dabei ist zu beachten, daß die rGZ 1. O. beim Uebergang zu den Filial-Generationen konstant bleiben (Nr. 21). Und es wird sich im besonderen zeigen, daß es gerade die zu diesen rGZ 1. O im Sinn der Nr. 23 zugehörigen (und damit selbst konstant bleibenden) »Gleichgewichtswerte« der rPZ sind, denen sich die rPZ im Laufe der Generationen unbeschränkt nähern.

Was wir da allgemein beweisen wollen, ist uns übrigens schon im Beispiel Nr. 16 entgegengetreten: Die Grenzwerte der rPHZ sind in Zahlentafel $(42, \infty)$ angegeben; tatsächlich sind diese Werte (desgleichen die in $(43, \infty)$ angegebenen Grenzwerte der rGZ) nichts anderes als die zu den rGZ 1. O $g_{1*} = 0{,}3$, $g_{2*} = 0{,}7$, $g_{*1} = 0{,}36$, $g_{*2} = 0{,}64$ gehörigen »Gleichgewichtswerte« dieser Zahlen; und das gleiche gilt dann auch von den Grenzwerten der rPZ.

Um den Beweis unserer Behauptung zu führen, wollen wir insbesondere die Veränderungen der rGZ im Laufe der Generationen verfolgen. Zunächst denken wir aus den gegebenen rPZ bzw. rPHZ die rGZ für die F^0-Generation, insbesondere auch diejenigen 1. Ordnung $g_{i_1 * \ldots *}, \ldots, g_{* \ldots * i_m}$ berechnet. Aus den letzteren lassen sich für die rGZ höherer (2ter bis $m$ter) Ordnung die zu den rGZ 1. O im Sinn von Nr. 22 gehörigen Gleichgewichtswerte berechnen; nur werden diese natürlich im allgemeinen von den wirklichen Werten dieser rGZ abweichen. Jede dieser Abweichungen, d. h. die Differenz zwischen dem tatsächlichen Wert der rGZ, z. B. $g_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *}$ und ihrem Gleichgewichtswert, soll durch den vorgesetzten Buchstaben E und Einklammern der rGZ bezeichnet und der »Exzeß« dieser rGZ genannt werden. Also:

$$E(g_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *}) = g_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *} - g_{i_1 * \ldots *} \cdot g_{* i_2 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g_{* \ldots * i_f * \ldots *}$$

oder beispielsweise analog:

$$E(g_{i_1 * i_3 * *}) = g_{i_1 * i_3 * *} - g_{i_1 * * * *} g_{* * i_3 * *}.$$

In entsprechender Weise sollen aus den rGZ gebildete Ausdrücke, wie z. B. das Produkt $g_{i_1 * i_3 * *} g_{* i_2 * * i_5}$ mit den aus den zugehörigen Gleichgewichtswerten gebildeten Ausdrücken verglichen und die Abweichung wieder als »Exzeß« und mit dem entsprechenden Symbol bezeichnet werden:

$$E(g_{i_1 * i_3 * *} g_{* i_2 * * i_5}) = g_{i_1 * i_3 * *} g_{* i_2 * * i_5} - g_{i_1 * * * *} g_{* * i_3 * *} g_{* i_2 * * *} g_{* * * * i_5}.$$

Dasselbe gelte für die Abweichungen der rPHZ und rPZ von ihren Gleichgewichtswerten. Und ganz ebenso sprechen wir auch vom Exzeß einer rGZ, rPHZ, rPZ (oder

eines Ausdruckes aus diesen Zahlen) für die F^1-Generation oder irgend eine spätere F^n-Generation. Dabei ist zu beachten, daß es wegen der Konstanz der rGZ 1. O vollständig gleichgültig ist, ob wir z. B.

$$E(g^1{}_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *}) = g^1{}_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *} - g^1{}_{i_1 * \ldots *} \cdot g^1{}_{* i_2 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g^1{}_{* \ldots * i_f * \ldots *}$$

schreiben oder:

$$E(g^1{}_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *}) = g^1{}_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *} - g_{i_1 * \ldots *} \cdot g_{* i_2 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g_{* \ldots * i_f * \ldots *}$$

Nimmt man etwa das Beispiel von Nr. 16, so hat man in (66) eine Zahlentafel solcher Exzeß-Werte, z. B.

$E(g_{11}) = g_{11} - g_{1*} g_{*1} = 0{,}3 - 0{,}108 = 0{,}192,$
$E(g^1{}_{11}) = 0{,}204 - 0{,}108 = 0{,}096,$
$E(q_{22\,11}) = q_{22\,11} - g_{2*} g_{2*} g_{*1} g_{*1} = 0{,}01 - 0{,}0635 = -0{,}0535;$

analog ist

$E(g_{11}\, g_{2*}) = g_{11}\, g_{2*} - g_{1*} g_{*1}\, g_{2*} = 0{,}21 - 0{,}0756 = 0{,}1344.$

n	$E(g^n{}_{11})$	$E(q^n{}_{22\,11})$
0	0,192	−0,0535
1	0,096	−0,0599
2	0,048	−0,0392
3	0,024	−0,0219
4	0,012	−0,0115
5	0,006	−0,0059
6	0,003	−0,0030
7	0,0015	−0,0015

(66)

26. Grenzwerte der relativen Gametenzahlen. Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, daß für jede einzelne rGZ ihr Exzeß im Laufe der Generationen sich schließlich unbeschränkt der Null nähert, die rGZ selbst also gegen ihre Gleichgewichtswerte konvergieren. Wir wollen das der Reihe nach für die verschiedenen Ordnungen der rGZ beweisen. Ueber die rGZ 1. O ist nichts weiter zu sagen, die bleiben konstant: ihr Exzeß ist für alle Generationen gleich null. Für eine rGZ 2. O wie z. B. $g^1{}_{i_1 i_2 * \ldots *}$ gilt (54) oder $g^1{}_{i_1 i_2 * \ldots *} = {}^1/_2 (g_{i_1 i_2 * \ldots *} + g_{i_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *})$ und analog gilt dann für den Uebergang von der F^{n-1}- zur F^n-Generation:

$$g^n{}_{i_1 i_2 * \ldots *} = {}^1/_2 (g^{n-1}{}_{i_1 i_2 * \ldots *} + g_{i_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *})$$

und daher

$$E(g^n{}_{i_1 i_2 * \ldots *}) = g^n{}_{i_1 i_2 * \ldots *} - g_{i_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} = {}^1/_2 (g^{n-1}{}_{i_1 i_2 * \ldots *} - g_{i_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *})$$
$$= {}^1/_2 E(g^{n-1}{}_{i_1 i_2 * \ldots *}).$$

Für jede spätere Generation ist also der Exzeß die Hälfte jenes für die vorige Generation[46]), also allgemein $E(g^n{}_{i_1 i_2 * \ldots *}) = \frac{1}{2^n} E(g_{i_1 i_2 * \ldots *})$, womit die unbeschränkte Annäherung an null für den Exzeß jeder rGZ 2. O gezeigt ist: $\lim_{n=\infty} E(g^n{}_{i_1 i_2 * \ldots *}) = 0$. Das aber ist gleichbedeutend mit $\lim_{n=\infty} g^n{}_{i_1 i_2 * \ldots *} = g_{i_1 * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *}$.

Gehen wir über zu den rGZ 3. O! Hier gilt Formel (56). Beachten wir das über diese Formel in Nr. 22 Gesagte, so können wir sie schreiben:

$$g^1{}_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} = \frac{1}{2^3} (2\, g_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} + S),$$

wo S eine Summe von $6 = 2^3 - 2$ Summanden ist, deren jeder aus rGZ 1. und 2. O (für die F^0-Generation) zusammengesetzt ist und in $g_{i_1 * * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} g_{* * i_3 * \ldots *}$ übergeht, wenn man die rGZ 2. O durch ihre Gleichgewichtswerte ersetzt. Ganz analog gilt dann für den Uebergang von der F^{n-1}- zur F^n-Generation eine Formel

$$g^n{}_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} = \frac{1}{2^3} (2\, g^{n-1}{}_{i_1 i_2 i_3 * \ldots *} + S^{(n-1)}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67),$$

wo $S^{(n-1)}$ eine Summe von $2^3 - 2$ Summanden ist, deren jeder aus rGZ 1. und 2. O für die F^{n-1}-Generation zusammengesetzt ist und in $g_{i_1 * * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} g_{* * i_3 * \ldots *}$ übergeht, wenn man darin die rGZ 2. O durch ihre Gleichgewichtswerte ersetzt. Wir können das so ausdrücken: Der Gleichgewichtswert von $S^{(n-1)}$ ist $(2^3 - 2) \cdot g_{i_1 * * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} g_{* * i_3 * \ldots *}$; oder auch so: Für den Exzeß von $S^{(n-1)}$ gilt:

$$E(S^{(n-1)}) = S^{(n-1)} - (2^3 - 2)\, g_{i_1 * * \ldots *} g_{* i_2 * \ldots *} g_{* * i_3 * \ldots *}.$$

Da nun aber im Ausdruck für $S^{(n-1)}$ nur rGZ höchstens bis zur 2. Ordnung vorkommen, diese aber mit wachsendem n gegen ihre Gleichgewichtswerte konvergieren, so nähert sich dabei der Exzeß $E(S^{(n-1)})$ unbeschränkt der Null:

$$\lim_{n=\infty} E(S^{(n-1)}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68).$$

[46]) Vgl. das Beispiel der Werte für $E(g^n{}_{11})$ in Zahlentafel (66).

Aus (67) folgt nun

$$E(g^n{}_{i_1\,i_2\,i_3\,*\,*\,*}) = g^n{}_{i_1\,i_2\,i_3\,*\,*\,*} - g_{i_1\,*\,*\,*\,*}\,g_{*\,i_2\,*\,\ldots\,*}\,g_{*\,*\,i_3\,*\,*\,*}$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(g^{n-1}{}_{i_1\,i_2\,i_3\,*\,*\,*} - g_{i_1\,*\,*\,*\,*}\,g_{*\,i_4\,*\,*\,*}\,g_{*\,*\,i_3\,*\,*\,*}\right)$$

$$+ \frac{1}{2^3}\left(S^{(n-1)} - (2^3-2)\,g_{i_1\,*\,*\,*\,*}\,g_{*\,i_2\,*\,*\,*}\,g_{*\,*\,i_3\,*\,*\,*}\right)$$

$$= \frac{1}{2^2}E(g^{n-1}{}_{i_1\,i_2\,i_3\,*\,*\,*}) + \frac{1}{2^3}E(S^{(n-1)}).$$

Für jede spätere Generation ist also der Exzeß $E(g^n{}_{i_1\,i_2\,i_3\,*\,*\,*})$ gleich $^1/_4$ jenes für die vorige Generation vermehrt um eine Größe, die wegen (68) den Grenzwert null hat. Daraus folgt[47]) für diesen Exzeß selbst die unbeschränkte Annäherung an null mit wachsendem n: $\lim\limits_{n=\infty} E(g^n{}_{i_1\,i_2\,i_3\,*\,*\,*}) = 0$, oder was dasselbe bedeutet:

$$\lim_{n=\infty} g^n{}_{i_1\,i_2\,i_3\,*\,*\,*} = g_{i_1\,*\,*\,*\,*}\,g_{*\,i_2\,*\,*\,*}\,g_{*\,*\,i_3\,*\,*\,*}.$$

Ganz ebenso kann man nun weiterschließen und zu rGZ immer höherer Ordnung übergehen. Nimmt man etwa an, es sei bereits gezeigt, daß die Exzesse aller rGZ bis zur Ordnung $f-1$ mit wachsendem n gegen null konvergieren, so zeigt man, daß dies auch für die rGZ der Ordnung f, wie z. B. $g_{i_1\,\ldots\,i_f\,*\,*\,*}$ gilt, unter Benutzung der Formel (52) und des über sie in Nr. 22 Gesagten. Denn dieses zeigt, daß

$$g^1{}_{i_1\,i_2\,\ldots\,i_f\,*\,\ldots\,*} = \frac{1}{2^f}\left(2\,g_{i_1\,i_2\,\ldots\,i_f\,*\,\ldots\,*} + S\right),$$

wo jetzt S eine Summe von 2^f-2 Summanden ist, deren jeder aus rGZ für die F^0-Generation höchstens von der Ordnung $f-1$ zusammengesetzt ist und, wenn man diese rGZ durch ihre Gleichgewichtswerte ersetzt, in das Produkt

$$Z = g_{i_1\,*\,\ldots\,*}\,g_{*\,i_2\,*\,\ldots\,*}\cdot\ldots\cdot g_{*\,\ldots\,*\,i_f\,*\,\ldots\,*} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

übergeht. Ganz analog gilt daher für den Uebergang von der F^{n-1}- zur F^n-Generation eine Formel der Gestalt:

$$g^n_{i_1\,i_2\,\ldots\,i_f\,*\,\ldots\,*} = \frac{1}{2^f}\left(2\,g^{n-1}_{i_1\,i_2\,\ldots\,i_f\,*\,\ldots\,*} + S^{(n-1)}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70),$$

wo $S^{(n-1)}$ jetzt ein Ausdruck mit den analogen Eigenschaften wie S ist, nur gebildet aus rGZ (wieder höchstens der Ordnung $f-1$) für die F^{n-1} Generation. Es ist also der »Gleichgewichtswert« von $S^{(n-1)}$ ebenso wie der von S gleich $(2^f-2)\,Z$. Wir können daher auch sagen: Für den Exzeß von $S^{(n-1)}$ gilt: $E(S^{(n-1)}) = S^{(n-1)} - (2^f-2)\,Z$. Da aber in $S^{(n-1)}$ nur rGZ höchstens bis zur Ordnung $f-1$ vorkommen, von denen, wie wir angenommen haben, schon gezeigt ist, daß sie gegen ihre Gleichgewichtswerte konvergieren, so nähert sich auch $S^{(n-1)}$ mit wachsendem n unbeschränkt seinem Gleichgewichtswert, d. h. es gilt wieder (68). Aus (70) aber folgt

$$E\left(g^n_{i_1\,\ldots\,i_f\,*\,\ldots\,*}\right) = g^n_{i_1\,\ldots\,i_f\,*\,\ldots\,*} - Z = \frac{1}{2^{f-1}}\left(g^{n-1}_{i_1\,\ldots\,i_f\,*\,\ldots\,*} - Z\right) + \frac{1}{2^f}\left(S^{(n-1)} - (2^f-2)\,Z\right)$$

$$= \frac{1}{2^{f-1}}E\left(g^{(n-1)}_{i_1\,\ldots\,i_f\,*\,\ldots\,*}\right) + \frac{1}{2^f}E(S^{(n-1)}).$$

---

[47]) Nach dem Hilfssatz in Nr. 27, in welchem man zu setzen hat $c = \frac{1}{2^2}$, $b_n = \frac{1}{2^3}E(S^{(n-1)})$, $a_n = E(g^n{}_{i_1\,i_2\,i_3\,*\,\ldots\,*})$. Man kann die Berufung auf diesen Hilfssatz vermeiden, wenn man etwas näher auf den Bau des Ausdrucks $S^{(n-1)}$ Bezug nimmt. Man erhält dann eine Formel der Gestalt:

$$E(g^n{}_{i_1\,i_2\,i_3\,*\,\ldots\,*}) = \frac{C_1}{2^n} + \frac{C_2}{2^{2n}},$$

wo C_1, C_2 aus den rGZ für die F^0-Generation bestimmbare Größen sind. Für größeres n tritt $\frac{C_2}{2^{2n}}$ gegen $\frac{C_1}{2^n}$ zurück, es findet dann angenähert fortgesetzte Halbierung der Exzeß-Werte statt. Nur wenn speziell die Exzeß-Werte aller rGZ 2. O in der F^0-Generation null sind, so ist auch $C_1 = 0$ und die Exzesse der rGZ 3. O werden für jede Generation $^1/_4$ derer für die vorhergehende.

Hieraus aber folgt genau so[48]), wie im eben betrachteten Fall $f = 3$, daß $\lim_{n=\infty} E^n\,(g^n_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *}) = 0$ ist, oder was dasselbe bedeutet:

$$\lim_{n=\infty} g^n_{i_1 i_2 \ldots i_f * \ldots *} = g_{i_1 * * \ldots *}\, g_{* i_2 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g_{* \ldots * f * \ldots *} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71).$$

Unser Schluß von $f-1$ auf f zeigt somit, daß allgemein für die rGZ jeder Ordnung bis zur m-ten gilt: Die rGZ nähern sich mit wachsendem n unbeschränkt ihren zu den rGZ erster Ordnung gehörigen Gleichgewichtswerten.

27. Ein Grenzwert-Hilfssatz. Es gilt der Satz: Wenn $0 < c < 1$ und $\lim_{n=\infty} b_n = 0$, ferner die Folge der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ durch a_0 und die Rekursionsformel

$$a_n = c\,a_{n-1} + b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

bestimmt ist, dann ist $\lim_{n=\infty} a_n = 0$.

Beweis: Man findet $a_n = c^n\,a_0 + \sum_{i=1}^{n} c^{n-i}\,b_i$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben und N_1 so gewählt, daß $|b_n| < {}^1/_2\,\varepsilon\,(1-c)$ für $n > N_1$; ferner N größer als N_1 und so gewählt, daß $c^N \left(a_0 + \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{b_i}{c^i}\right)\right) < {}^1/_2\,\varepsilon$; für alle $n \geq N$ wird dann

$$\left|\sum_{i=N_1+1}^{n} c^{n-i}\,b_i\right| < {}^1/_2\,\varepsilon\,(1-c)\,(1 + c + c^2 + \ldots + c^{n-N_1-1}) < {}^1/_2\,\varepsilon$$

und

$$|a_n| = \left|c^n \left(a_0 + \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{b_i}{c^i}\right)\right) + \sum_{i=N_1+1}^{n} c^{n-i}\,b_i\right| < {}^1/_2\,\varepsilon + {}^1/_2\,\varepsilon = \varepsilon,$$

also $|a_n|$ beliebig klein, w. z. b. w.

28. Grenzwerte der relativen Populationszahlen. Daß sich die rGZ jeder Ordnung im Laufe der Generationen bestimmten Grenzwerten nähern, wurde bereits in Nr. 26 bewiesen. Daß das gleiche für die rPHZ bzw. rPZ gilt, ist daraus unmittelbar zu entnehmen. Denn Formel (37) zeigt, wie sich die $q^n_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$ durch die rGZ der F^{n-1}-Generation ausdrücken lassen, und da diese rGZ mit wachsendem n bestimmten Grenzwerten zustreben, so gilt das gleiche von den Werten $q^n_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m}$. Beachtet man den Satz in Nr. 26 bzw. Formel (71) für $f = m$, so erkennt man, daß

$$\lim_{n=\infty} g^{n-1}_{h_1 h_2 \ldots h_m} = g_{h_1 * \ldots *}\, g_{* h_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * h_m}, \qquad \lim_{n=\infty} g^{n-1}_{k_1 k_2 \ldots k_m} = g_{k_1 * \ldots *}\, g_{* k_2 * \ldots *} \cdots g_{* \ldots * k_m}$$

ist; beachtet man ferner (vgl. Nr. 23)

$$g_{h_1 * \ldots *}\, g_{k_1 * \ldots *} = g_{i_1 * \ldots *}\, g_{j_1 * \ldots *}, \qquad g_{* h_2 * \ldots *}\, g_{* k_2 * \ldots *} = g_{* i_2 * \ldots *}\, g_{* j_2 * \ldots *} \text{ usw.},$$

so erkennt man, daß alle 2^m Summanden in (37) dem gleichen Grenzwert, nämlich dem Produkt (61) zustreben; daher gilt:

$$\lim_{n=\infty} q^n_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} = g_{i_1 * \ldots *}\, g_{j_1 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g_{* \ldots * i_m}\, g_{* \ldots * j_m}$$

und daher wegen (39)

$$\lim_{n=\infty} p^n_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} = 2^{\beta(i_1 j_1 \ldots i_m j_m)}\, g_{i_1 * \ldots *}\, g_{j_1 * \ldots *} \cdot \ldots \cdot g_{* \ldots * i_m}\, g_{* \ldots * j_m}.$$

Somit: Die rPHZ und rPZ nähern sich tatsächlich denjenigen Gleichgewichtswerten, die zu den rGZ 1. O gehören, und unsere Behauptung eingangs Nr. 25 ist damit bewiesen.

Wie noch (ohne Beweis) angeführt sei, gilt für die Abweichungen von diesen Grenzwerten, daß sie im allgemeinen bei hinreichend fortgesetzter Annäherung etwa die

---

[48]) Man hat im Hilfssatz von Nr. 27 nur zu setzen $c = \frac{1}{2^{f-1}}$, $b_n = \frac{1}{2^f}\,E\,(S^{(n-1)})$, $a_n = E\left(\begin{smallmatrix} n \\ i_1 \ldots i_f * \ldots * \end{smallmatrix}\right)$.

Näheres Eingehen auf den Bau von $S^{(n-1)}$ würde wieder auf eine Formel führen von der Gestalt:

$g^n_{i_1 \ldots i_f * \ldots *} = \frac{C_1}{2^n} + \frac{C_2}{2^{2n}} + \frac{C_3}{2^{3n}} + \ldots + \frac{C_{f-1}}{2^{(f-1)n}}$ mit Koeffizienten $C_1, \ldots, C_{f-1}$, die allein aus den rGZ der F^0-Generation bestimmbar sind. Wieder ist $C_1 = 0$ (bzw. $C_1 = C_2 = \ldots = C_{l-1} = 0$), wenn die Exzesse aller rGZ der Ordnung 2 (bzw. 2 bis l) null sind. Wir gehen auf diese Fallunterscheidungen hinsichtlich der Art der Konvergenz nicht weiter ein.

Hälfte der Abweichung in der vorhergehenden Generation betragen. Für die ersten Schritte braucht dies allerdings nicht zu gelten. Zur Illustration diene etwa das Verhalten von $E(q^{n}_{22\,11})$ in der Zahlentafel (66). In gewissen Fällen allerdings erfolgt die Annäherung rascher. Diese Fälle sind dadurch gekennzeichnet, daß von vornherein (in der F^0-Generation) schon rGZ höherer als der 1. O (etwa alle bis zur Ordnung l einschließlich) ihre Gleichgewichtswerte haben und erst unter den rGZ der Ordnung $l+1$ solche auftreten, die von ihren Gleichgewichtswerten verschieden sind. Eine spezielle Rolle spielt dabei der Fall, daß $l = m$, d. h. daß alle rGZ bis zur höchsten Ordnung schon in der F^0-Generation ihre Gleichgewichtswerte haben. Dann tritt nämlich von der F^1-Generation angefangen (also nicht erst als Grenzwert im Laufe der Generationen) volles Gleichgewicht auch in den rPZ ein. Dieser Fall, der nur eine Vorstufe des Gleichgewichts darstellt — im Falle des Polyhybridismus ein Sonderfall —, war bei Monohybridismus der einzige neben dem Gleichgewichtsfall auftretende: für $m = 1$ sind eben die rGZ höchster Ordnung zugleich jene 1. O, also notwendig konstant.

Zusammenfassend haben wir somit: Wenn eine Population mit beliebigem Ausgangszahlenverhältnis ihrer verschiedenen Typen sich selbst überlassen nach Zufallsgesetzen sich fortpflanzt und dabei die in der Einleitung genannten Gleichmäßigkeits-Voraussetzungen zutreffen, dann nähern sich die Zahlenverhältnisse im Laufe der Generationen gewissen Grenzwerten, die einen Gleichgewichtszustand darstellen (es sei denn, daß schon von vornherein ein Gleichgewichtszustand vorliegt oder bereits in der ersten Filial-Generation erreicht wird). Diese Gleichgewichtswerte der relativen Populationszahlen bestimmt man aus den Formeln (62) bzw. (63), nachdem man aus den gegebenen Ausgangswerten der Populationszahlen die zugehörigen relativen Gametenzahlen erster Ordnung (Nr. 18) ermittelt hat.

Zusatz bei der Korrektur. Der Grenzwertsatz von Nr. 27 folgt, worauf mich Herr H. Hahn (Wien) aufmerksam machte, leicht aus Sätzen von O. Toeplitz und J. Schur betreffend Koeffizientensysteme c_{ni}, welche jeder konvergenten bzw. gegen null konvergenten Folge $b_0, b_1, b_2, \ldots$ vermöge $a_n = \sum_i c_{ni} b_i$ wieder eine konvergente Folge $a_0, a_1\, a_2, \ldots$ mit gleichem Limes zuweisen. Vergl. O. Toeplitz, Prace Matematyczno-Fizyczne, 22 (1911) p. 117. T. Kojima, Tohoku Journ. 12 (1917) p. 300. J. Schur, Journal f. r. u. a. Math. 151, p. 85. H. Hahn, Monatsh. f. Math. u Phys. 32 (1922) p. 20. In unserem Falle ist $c_{ni} = c^{n-i}$ und die fraglichen Bedingungen $\lim_{n=\infty} c_{ni} = 0$ und $\sum_i |c_{ni}| <$ einer von n unabhängigen Schranke sind also erfüllt. 295

Erlangen, Mathematisches Seminar der Universität, Mai 1923.

KURZE AUSZÜGE

Hydraulik.

Bewegung in zähen Flüssigkeiten. T. H. Havelock behandelt im Phil. Mag. 42 (1921), S. 620, 628, Probleme der ungleichförmigen Bewegung von Körpern in zähen Flüssigkeiten. Die bewegten Körper sind als unendliche Ebenen oder Kreiszylinder vorausgesetzt, so daß eindimensionale Aufgaben vorliegen. Folgende Fälle werden untersucht: Die Ebene bezw. der Zylinder ist stets vertikal angenommen: Bewegung unter Wirkung der Schwerkraft, unter einer zeitlich rein harmonischen Kraft, oder unter einer elastischen Kraft, die nach einer Ruhelage zurückzieht, wobei die Flüssigkeit immer durch vertikale Wände begrenzt gedacht ist. Das Interesse des Verfassers bei der Behandlung dieser Aufgaben gilt mehr der mathematischen Methode, als den physikalischen Fragen.

Bei Aufgaben dieser Art ist die Reibung an der bewegten Fläche nicht unmittelbar eine Funktion der Geschwindigkeit, sondern hängt von der Geschwindigkeitsverteilung der Strömung und indirekt von der Vorgeschichte des momentanen Bewegungszustandes ab. Man kann die Bewegungsgleichung daher als eine Integralgleichung, und zwar vom Volterraschen Typus, aufstellen. Ihr Kern wird eine aus Exponentialfunktionen gebildete Reihe. Andererseits läßt sich die Aufgabe aber auch nach den elementaren Methoden der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen behandeln und führt so zu einer Lösung, die gleichfalls durch eine solche Reihe mit anderen Exponenten gegeben ist. Man gewinnt also damit auch eine Lösung der Integralgleichung. Der Gedanke des Verfassers ist nun, diese Lösung nutzbar zu machen für

andere Fälle, die auf ähnliche Integralgleichungen führen (z. B. Aufgaben mit Hysteresis-Einflüssen), für die aber ein paralleles Differentialgleichungssystem nicht ohne weiteres aufstellbar ist. Es ist kaum nötig zu erwähnen, daß diese Lösungen auch aus den in der Theorie der Integralgleichungen bekannten Entwicklungssätzen gefunden werden könnten.

Ausführliche Untersuchungen über die Verwendbarkeit von Wasserrädern bei Bremsversuchen, zur Bestimmung des Antriebsmoments von Motoren, teilt Dipl.-Ing. W. Schmidt mit (Ztschr. d. V. d. Ing. 65, 1921, S. 441).

Das vollständig eingetauchte Wasserrad erfährt, bei Vermeidung von Nebenwirkungen, bei jeder Umlaufzahl ein bestimmtes Widerstandsmoment in der Flüssigkeit, proportional dem Quadrat der Umlaufzahl. Da das Motormoment mit wachsender Umlaufzahl abnimmt, ergibt sich ein scharfer Schnitt der Motorcharakteristik (Beziehung zwischen Umlaufzahl und Moment) mit der des Wasserrads, also ein bestimmtes Paar zusammengehöriger Werte. Verwendet man viele ähnliche Wasserräder verschiedener Größe, so wächst das Widerstandsmoment, mit geringen meßbaren Abweichungen, mit der 5. Potenz des Durchmessers. So kann man daher, durch Kupplung des Motors mit den Wasserrädern, zahlreiche Punkte der Motorcharakteristik scharf erhalten. Naturgemäß wird diese Meßmethode in erster Linie für Schiffsmotoren in Betracht kommen.

Der theoretische Versuch des Verfassers, die erhaltenen Resultate auf Wasserräder anderer Form zu übertragen, indem er einfach den Widerstand jedes Flügelelements dem dort herrschenden Geschwindigkeitsquadrat proportional setzt, ist bedenklich. Es müßten hier zumindest die bekannten Ergebnisse über die Druckverteilung an rotierenden Flächen herangezogen werden.

Breslau. F. Noether. 81

Ausflußzahlen bei unvollkommener Kontraktion. Unter dem Titel »Orifice coefficients-Data and results of Tests« ist in »Mechanical Engineering«, June 1923, S. 342 bis 348« ein Aufsatz von Jacob M. Spitzglass veröffentlicht, der Ergebnisse von Versuchen mit durchlöcherten Stauscheiben in einer Luftleitung enthält. Zur Erzeugung des Luftstroms diente ein Ventilator, der im Höchstfalle 17 cbm/min Luft bei einem Druck von 250 mm Wassersäule lieferte. Die Versuche sollten den Einfluß des Oeffnungsverhältnisses, der Rohrgröße und des Abstandes der Druckmeßanschlüsse oberhalb und unterhalb der Stauscheibe ermitteln. Sie wurden für Durchmesser von 50 bis 300 mm durchgeführt. Bei jedem Rohr wurde das Oeffnungsverhältnis 11 mal geändert. Auf jeder Seite der Stauscheibe waren 12 Anschlüsse zum Messen der Drücke vorhanden, die sich bis auf eine Entfernung vom 5 fachem Rohrdurchmesser oberhalb und unterhalb verteilten. Die Stauscheibe hatte kreisrunde Oeffnungen.

In den dem Aufsatz beigefügten Kurventafeln, die die Druckverteilung über die Rohrlänge darstellen, sind nicht die Druckunterschiede für zwei bestimmte Punkte vor und hinter der Stauscheibe angegeben, sondern die Ausflußzahlen, die aus den gemessenen Drücken errechnet wurden. Als charakteristische Punkte hinter der Stauscheibe wurden der Punkt, in dem der Strahl seine größte Kontraktion hat (Ort der vena contracta), und der Punkt, wo die Strömungsenergie bis auf den Stoßverlust wieder in Druck umgesetzt ist, gewählt. Die Kurven zeigen, daß die Druckunterschiede zwischen den Meßanschlüssen vor der Stauscheibe und einem von diesen beiden Punkten ein ziemlich flaches Minimum in der Entfernung von $2\,D$ bis $0{,}75\,D$ (D = Rohrdurchmesser) haben.

In dieser Entfernung soll also der charakteristische Punkt vor der Stauscheibe liegen. Aus den Druckunterschieden zwischen diesem Punkte und den Meßanschlüssen hinter der Stauscheibe ist zu ersehen, daß der Höchstwert des Druckunterschiedes, der dem Querschnitt größter Kontraktion entspricht, sich nicht eindeutig durch den Durchmesser ausdrücken läßt, daß aber der Kleinstwert des Druckunterschiedes, der dem Querschnitt der bis auf den Stoßverlust zurückgewonnenen Strömungsenergie entspricht, ziemlich genau in der Entfernung $5\,D$ hinter der Stauscheibe auftritt. Ein geringes Abweichen von diesen Punkten kann nach Ansicht des Verfassers erheblich abweichende Drücke ergeben. Leider wurden Messungen unmittelbar vor und hinter der Stauscheibe von ihm nicht gemacht.

Aus den so gefundenen maximalen und minimalen Druckunterschieden sind die Ausflußzahlen errechnet und für Oeffnungsverhältnisse d^2/D^2 (d = Oeffnungsdurchmesser) von 0,05 bis 0,70 in einer Tafel dargestellt.

Bei den Versuchen zeigte sich, daß größere Rohre bei gleichem Oeffnungsverhältnis kleinere Ausflußzahlen ergaben als kleinere Rohre. So wurde z. B. die Ausflußzahl bei einem Rohr von $D = 300$ um 1 bis 2 ‰ kleiner als bei einem solchen von $D = 150$ gefunden. Als Beispiel mögen die Angaben über Kontraktionszahl μ und Ausflußzahl φ (die μ mal Geschwindigkeitskoeffizient) für das Rohr von $D = 300$ mm, Messung an der Stelle stärkster Kontraktion, dienen. Es fand sich:

für d^2/D^2	= 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
	= 0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
$1000\,\eta$	= 603	609	612	615	619	626	633
	= 641	649	661	674	689	706	728
$1000\,\varphi$	= 603	610	614	620	627	637	649
	= 663	679	700	725	756	795	846

Danzig. P. Reschke. 338

Strömung in konisch erweiterten Rohren. Versuche über den Verlauf der Wasserströmung in erweiterten Rohren sind gewiß heute

noch von hohem Interesse, wenn es auch nicht richtig ist, daß »bisher nichts zur Erforschung des Strömungscharakters in divergierenden Rohren geschehen« sei. Mit dieser Behauptung leitet George E. Lyon den Auszug aus einer Dr.-Ing.-Dissertation ein, den er in den Transactions of the American society of mechanical engineers, Bd. 43, 1921, S. 1245 bis 1258 veröffentlicht. Er machte Versuche an 7 Saugrohren, die an der Eintrittstelle sämtlich 3 engl. Zoll Durchmesser hatten, während fünf auf 6 Zoll und zwei auf 9 Zoll sich erweiterten; der ganze Conus-Winkel lag zwischen 4 und 12°. An vier Querschnitten wurde die Geschwindigkeits-Verteilung, und zwar bei drei verschiedenen Durchflußmengen aufgenommen. Die Ergebnisse werden in 84 Geschwindigkeits-Kurven dargestellt, die den charakteristischen Verlauf — allmähliche Verbreiterung des Strömungskernes über den Querschnitt — aufweisen. Das erste Versuchsrohr, das aus Beton hergestellt war und einen Conus-Winkel von 4° besaß, zeigte starke Abweichungen von allen übrigen und wurde für die weitere Untersuchung ausgeschieden. Von den sechs Stahlrohren zeigte ein 43 engl. Zoll langes mit dem Oeffnungswinkel 8° den besten Wirkungsgrad, und zwar bei mittleren Geschwindigkeiten von 10 bis 20 Fuß/Sekunde fast unveränderlich 91 vH. Den geringsten Wirkungsgrad, und zwar wieder in den gleichen Grenzen fast unveränderlich, wies ein 34 engl. Zoll langes Rohr mit 10° Oeffnungswinkel auf. Um diese Ergebnisse richtig beurteilen und verwerten zu können, bedarf es wohl noch kritischer Durcharbeitung der Versuchsbedingungen, namentlich hinsichtlich der Auswahl der Rohrlängen und der Meßquerschnitte. Mises. 351

KLEINE MITTEILUNGEN

Gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl. In fast allen hydro- und aerodynamischen Aufgaben, bei welchen sowohl die Trägheit als die Reibung der Flüssigkeit bezw. des Gases eine Rolle spielt, tritt als wesentlicher Parameter die sog. »Reynoldssche Kennzahl« auf. Betrachten wir z. B. den Widerstand gegen die gleichförmige Translationsbewegung eines festen Körpers, so kann man aus den Differentialgleichungen, welche für die Bewegung der Flüssigkeit gelten, leicht herleiten, daß der Strömungszustand bei geometrisch ähnlichen Widerstandskörpern ähnlich bleibt, falls die Verhältniszahl $\frac{U d \varrho}{\mu}$ ($U =$ Geschwindigkeit des Körpers, $d =$ eine lineare Dimension desselben, $\varrho =$ Dichte der Flüssigkeit, $\mu =$ Koeffizient der inneren Reibung) denselben Wert hat. Bezieht man — wie üblich — den Widerstand auf die Stirnfläche f des Körpers und auf den Staudruck $\frac{\varrho U^2}{2}$, so wird die Widerstandsziffer ψ in der Formel

$$W = \psi f \frac{\varrho U^2}{2}$$

eine Funktion der Kennzahl $R = \frac{U d \varrho}{\mu}$.

Zur Erklärung der Reynoldsschen Kennzahl pflegt man zumeist anzuführen, daß sie die einzige dimensionslose Kombination aus den physikalischen Konstanten ϱ und μ einerseits und aus den Bestimmungsgrößen: Geschwindigkeit und Körperabmessung andererseits darstellt. Fernerhin kann man anführen, daß sie ein Maß für das Größenverhältnis der entstehenden Massen- und Reibungskräfte liefert, indem die ersteren mit dem Staudruck $\frac{\varrho U^2}{2}$, die letzteren mit $\frac{\mu U}{d}$ wachsen. (Die Reibung ist gleich Reibungskonstante $\times$ senkrechtes Gefälle der Geschwindigkeit; das Gefälle ist jedoch bei ähnlich bleibender Strömung der Geschwindigkeit direkt und der Körperabmessung umgekehrt proportional.)

Neben diesen rein hydrodynamischen Deutungen, zu welchen noch die durch v. Mises gegebene Deutung als »reduzierte Geschwindigkeit« hinzuzufügen wäre, hat es vielleicht gewisses Interesse, daß man zu einer recht anschaulichen Darstellung gelangt, wenn man — wenigstens für ideale Gase — auf die gastheoretische Herleitung des Reibungskoeffizienten zurückgreift.

Die kinetische Theorie der Gase deutet die innere Reibung als »Impulstransport« quer zur Strömungsrichtung. Legen wir ein Flächenelement von der Flächengröße Eins tangentiell zur Stömungsgeschwindigkeit v, so ist die Reibung pro Flächeneinheit, d. h. die Schubspannung, gleich der nach der Strömungsrichtung gerichteten Impulsmenge, welche in der Zeiteinheit durch die Fläche durchtritt. Um diesen Impulstransport zu berechnen, kann man sich folgender vereinfachten Betrachtungsweise bedienen:

Wir denken uns je eine Schicht von der Dicke der »mittleren Weglänge« λ auf beiden Seiten des Flächenelements; dieser Raum repräsentiert uns dann den Bereich, innerhalb dessen der Impulstransport erfolgt. Bezeichnen wir die mittlere Molekulargeschwindigkeit der thermischen Agitation mit c, so ist die nach beiden Richtungen sekundlich transportierte Gasmenge proportional $c\varrho$. Ist das Gefälle der Geschwindigkeit $\frac{\partial v}{\partial n}$ senkrecht zum Flächenelement von Null verschieden, so führt die Gasmenge, welche von der nach wachsender Strömungsgeschwindigkeit gelegenen Seite herstammt, eine größere Impulsmenge mit sich. Die mittlere Geschwindigkeit beträgt in der Schicht von der Dicke λ auf der Seite der positiven Normalen offenbar

$v + \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\lambda}{2}$, auf der entgegengesetzten Seite $v - \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\lambda}{2}$, so daß der Ueberschuß an durchtretendem Impuls $c\varrho\lambda\frac{\partial v}{\partial n}$ proportional ist. Nun setzt man die Schubspannung nach dem phänomenologischen Ansatz

$$\tau = \mu\frac{\partial v}{\partial n},$$

so daß die Reibungskonstante bis auf einen Zahlenfaktor, welcher lediglich von der Art der Mittelwertbildung abhängt, gleich $\varrho c\lambda$ wird.

Führen wir diesen Ausdruck in die Reynoldssche Kennzahl ein, so sehen wir, daß wir diese ersetzen können durch das Produkt zweier Verhältniszahlen

$$R' = \frac{U}{c}\cdot\frac{d}{\lambda},$$

d. h. durch das Produkt der Verhältniszahl zwischen Translationsgeschwindigkeit U und Molekulargeschwindigkeit c mit der Verhältniszahl zwischen Körperabmessung und mittlerer Weglänge.

Die vollständige Diskussion des Widerstandsproblems gestaltet sich alsdann etwa wie folgt:

a) Bereich der Brownschen Bewegung: $\frac{U}{c} \ll 1$, $\frac{d}{\lambda} \sim 1$. — Die Translationsgeschwindigkeit ist klein gegen die Molekulargeschwindigkeit, die Körperabmessung ist vergleichbar mit der molekularen Weglänge. Bekanntlich ist die Stokessche Widerstandsformel in diesem Falle nicht mehr stichhaltig und bedarf der Korrektion mit gastheoretischen Hilfsmitteln (z. B. Formel von Cunningham).

b) Hydro(aero)dynamischer Bereich: $\frac{U}{c} \ll 1$, $\frac{d}{l} \gg 1$. — Es gelten die Differentialgleichungen der Hydrodynamik. Für die Strömungsform und das Widerstandsgesetz ist lediglich das Produkt $R' = \frac{Ud}{c\lambda}$, d. h. die Reynoldssche Kennzahl maßgebend. Der Strömungszustand ist bei kleinen Werten von R' durch die Reibung bestimmt (Stokessches, lineares Widerstandsgesetz), bei wachsender Kennzahl folgt zunächst Uebergang in eine nichtstationäre Wirbelströmung mit regelmäßiger Periodizität (Wirbelstraßen, nahezu quadratisches Widerstandsgesetz mit den »großen Koeffizienten«), schließlich meist nach plötzlichem Umschlag (kritischer Punkt) eine unregelmäßige, im Mittel stationäre Strömungsform (turbulente Strömung, quadratisches Widerstandsgesetz mit den »kleinen Koeffizienten«).

c) Ballistischer Bereich: $\frac{U}{c} \sim 1$, $\frac{d}{\lambda} \gg 1$. — Die Translationsgeschwindigkeit ist von derselben Größenordnung wie die Molekulargeschwindigkeit, oder — was auf dasselbe herauskommt — die Schallgeschwindigkeit. Für die Strömungsform sind die thermischen Vorgänge mitbestimmend. Man kann daher sagen, daß die eigentliche Hydro- oder Aerodynamik nur im Fall b) ausreicht. Sowohl im Fall a) wie im Fall c) muß die Thermodynamik eingreifen; nur im ersten Fall müssen wir auf ihre molekulartheoretische Fassung zurückgreifen, während im letzten Fall die phänomenologischen Ansätze ausreichen.

Aachen. Th. v. Kármán. 314

Ueber die bei Funktionen von Variabeln auftretende Korrelation. Der Korrelationskoeffizient stellt den Zusammenhang dar, der zwischen zwei Variabeln im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie besteht. Hat man eine Reihe von Variabeln und bildet man aus ihnen zwei Funktionen, so soll im folgenden der zwischen diesen Funktionen bestehende Zusammenhang berechnet werden. Interessant ist besonders der Fall, daß die Variabeln selbst zusammenhangslos sind.

Man habe die Variabeln X_ν ($\nu = 1, 2, \ldots n$) im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie, zwischen denen die Korrelationen $r_{\varkappa\lambda}$ bestehen, M_ν seien ihre Mittelwerte, x_ν die Fehler, μ_ν die mittleren Fehler und N die Zahl der Beobachtungen. Man bilde aus den X_ν zwei Funktionen

$$Z_1 = f(X_\nu) \quad \text{und} \quad Z_2 = g(X_\nu).$$

Bezeichnet man die Mittelwerte der Z mit I, ihre mittleren Fehler mit σ, jeweils versehen mit dem entsprechenden Index, so gilt für den Korrelationskoeffizienten ϱ zwischen Z_1 und Z_2 nach der Definition

$$\varrho\,\sigma_1\,\sigma_2 = \frac{1}{N}\Sigma\,(Z_1 - I_1)\,(Z_2 - I_2).$$

Im folgenden wird ϱ mit Hilfe der Mittelwerte M_ν der X_ν, ihrer mittleren Fehler μ_ν und der zwischen den X_ν bestehenden Korrelationskoeffizienten $r_{\varkappa\lambda}$ berechnet. Diese Daten sind den Beobachtungen der X_ν selbst zu entnehmen. Infolge der Definition der Mittelwerte wird die rechte Seite gleich

$$\frac{1}{N}\Sigma\,f(X_\nu)\,g(X_\nu) - I_1\cdot I_2.$$

Man setze für f und g eine Potenzreihenentwicklung ein, bezeichne $f(M_\nu)$ mit f und die entsprechenden Ableitungen mit $f_{\varkappa\lambda}$. Man vernachlässige dann die dritten und höheren Potenzen der Fehler gegenüber den entsprechenden Potenzen der Mittelwerte. Dann wird dies zu

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\Sigma\,(&f + f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + {}^1/_2 f_{11} x_1^2\\ &+ {}^1/_2 f_{22} x_2^2 + \ldots + f_{12} x_1 x_2 + f_{13} x_1 x_3 + \ldots)\\ (&g + g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + {}^1/_2 g_{11} x_1^2 + {}^1/_2 g_{22} x_2^2\\ &+ \ldots + g_{12} x_1 x_2 + g_{13} x_1 x_3 + \ldots) - I_1 I_2.\end{aligned}$$

Nun gilt für den Mittelwert I_1 der Z_1 unter derselben Voraussetzung

$$I_1 = f + {}^1/_2\,\Sigma\,f_{\varkappa\varkappa}\,\mu_\varkappa^2 + \Sigma\,f_{\varkappa\lambda}\,\mu_\varkappa\,\mu_\lambda\,r_{\varkappa\lambda} \quad (1)$$

und für den mittleren Fehler σ_1 der Z_1

$$\sigma_1^2 = \Sigma\,f_\varkappa^2\,\mu_\varkappa^2 + 2\,\Sigma\,f_\varkappa\,f_\lambda\,\mu_\varkappa\,\mu_\lambda\,r_{\varkappa\lambda} \quad (2).$$

(Vergl Czuber, Die statistischen Forschungsmethoden, Wien 1921, S. 151.)

Beachtet man die Definition der Fehler, der Korrelationskoeffizienten, der mittleren Fehler und die oben angegebenen Ausdrücke für die Mittelwerte I_1 und I_2, so erhält man

$$\begin{aligned}\varrho\,\sigma_1\,\sigma_2 = {} & f\,g + \mu_1^2\,(g_1\,f_1 + {}^1/_2\,g_{11}\,f + {}^1/_2\,f_{11}\,g)\\ & + \mu_2^2\,(g_2\,f_2 + {}^1/_2\,g_{22}\,f + {}^1/_2\,f_{22}\,g) + \ldots\\ & + \mu_1\,\mu_2\,r_{12}\,(g_1\,f_2 + g_2\,f_1 + g_{12}\,f + f_{12}\,g) + \mu_1\,\mu_3\,r_{13}\,(g_1\,f_3 + g_3\,f_1 + g_{13}\,f + f_{13}\,g) + \ldots\\ & - f\,g - \mu_1^2\,({}^1/_2\,g_{11}\,f + {}^1/_2\,f_{11}\,g)\\ & - \mu_2^2\,({}^1/_2\,g_{22}\,f + {}^1/_2\,f_{22}\,g)\\ & - \mu_1\,\mu_2\,r_{12}\,(f_{12}\,g + g_{12}\,f) - \mu_1\,\mu_3\,r_{13}\,(f_{13}\,g + g_{13}\,f)\ldots.\end{aligned}$$

Demnach wird

$$\varrho = \frac{\Sigma\,\mu_\varkappa^2\,g_\varkappa\,f_\varkappa + \Sigma\,\mu_\varkappa\,\mu_\lambda\,r_{\varkappa\lambda}\,(f_\varkappa\,g_\lambda + f_\lambda\,g_\varkappa)}{\sqrt{(\Sigma\,f_\varkappa^2\,\mu_\varkappa^2 + 2\,\Sigma\,f_\varkappa\,f_\lambda\,\mu_\varkappa\,\mu_\lambda\,r_{\varkappa\lambda})\,(\Sigma\,g_\varkappa^2\,\mu_\varkappa^2 + 2\,\Sigma\,g_\varkappa\,g_\lambda\,\mu_\varkappa\,\mu_\lambda\,r_{\varkappa\lambda})}} \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Der Korrelationskoeffizient zwischen Funktionen von Variabeln hängt also nicht bloß von den Korrelationskoeffizienten der Variabeln selbst, sondern auch von ihren mittleren Fehlern ab, die keinen physikalischen oder organischen, sondern einen meßtechnischen, zufälligen Charakter tragen.

Hat man eine Korrelation zwischen Funktionen von Variabeln beobachtet, so muß man zur Beurteilung des tatsächlichen Zusammenhangs in Rechnung ziehen, wie groß der nur durch das funktionelle Zusammenfassen entstandene Koeffizient ist. Setzt man die Korrelationen zwischen den Variabeln gleich null, so wird

$$\varrho_0 = \frac{\Sigma\,\mu_\varkappa^2\,g_\varkappa\,f_\varkappa}{\sqrt{\Sigma\,f_\varkappa^2\,\mu_\varkappa^2 \cdot \Sigma\,g_\varkappa^2\,\mu_\varkappa^2}} \quad \ldots\ldots (4).$$

ϱ_0 ist nur dann von null verschieden, wenn die Funktionen f und g mindestens eine Variable X gemeinsam haben. In diesem Fall wird man in der Differenz zwischen der beobachteten Korrelation ϱ und der theoretischen ϱ_0 ein Maß des echten Zusammenhanges erblicken können. Doch ist diese Differenz kein Korrelationskoeffizient, da sie im allgemeinen zwischen -2 und $+2$ liegt.

Hat man also z. B. zwei Funktionen $f(X_1, X_2)$ und $g(X_1\,X_3)$ von drei Variabeln, welche keinen Zusammenhang aufweisen, so existiert trotzdem zwischen f und g ein Zusammenhang, der sich durch einen endlichen Korrelationskoeffizienten ausdrückt. Doch ist diese Korrelation nur eine scheinbare.

Diese Korrelation zwischen Funktionen von Variabeln, wobei eine der Variabeln eine ausgezeichnete Rolle spielt, ist also irreführend.

Sind speziell die Funktionen f und g Produkte und ist $Z_1 = X_1 \cdot X_2$, $Z_2 = X_3 \cdot X_4$, so wird $f = M_1 \cdot M_2$

$g = M_3 \cdot M_4$

und $I_1 = M_1 \cdot M_2 + \mu_1\,\mu_2\,r_{12}$

$\sigma_1 = M_1^2\,\mu_2^2 + M_1^2\,\mu_1^2 + 2\,M_1\,M_2\,\mu_1\,\mu_2\,r_{12}$.

(Man könnte hieraus übrigens, wenn die Mittelwerte und mittleren Fehler zweier Variabeln und der mittlere Fehler ihres Produktes bekannt sind, den Korrelationskoeffizienten der beiden Variabeln berechnen.)

Setzt man die Werte von f und g und die Werte ihrer Differentialquotienten in (3) ein, so wird

Dividiert man Zähler und Nenner durch $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$ und bezeichnet man $\frac{\mu}{M} = v$ (Variationskoeffizient), so wird

$$\varrho = \frac{v_1\,v_3\,r_{13} + v_1\,v_4\,r_{14} + v_2\,v_3\,r_{23} + v_2\,v_4\,r_{24}}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + 2\,v_1\,v_2\,r_{12})\;(v_3^2 + v_4^2 + 2\,v_3\,v_4\,r_{34})}} \quad (3a).$$

Somit ist die Korrelation ϱ ausgedrückt durch die vier Korrelations- und die vier Variationskoeffizienten. Sie ist natürlich null, wenn die vier Messungen unkorreliert sind. Sind dagegen zwei der Variabeln vollständig korreliert, z. B. identisch, also $X_2 = X_4$; $v_2 = v_4$; $r_{24} = 1$, so ist

$$\varrho = \frac{v_1\,v_3\,r_{13} + v_1\,v_2\,r_{12} + v_2\,v_3\,r_{23} + v_2^2}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + 2\,v_1\,v_2\,r_{12})\;(v_3^2 + v_2^2 + 2\,v_2\,v_3\,r_{23})}}$$

Das ist der Korrelationskoeffizient zwischen zwei Produkten, in denen derselbe Faktor vorkommt. Dieser Wert verschwindet nicht, wenn die nicht identischen Variabeln unkorreliert sind. Denn wenn $r_{13} = r_{12} = r_{23} = 0$, so bleibt

$$\varrho_0 = \frac{v_2^2}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)\;(v_2^2 + v_3^2)}} \quad \ldots (4\,a).$$

Dieser Wert gibt die scheinbare Korrelation, die bei zwei Produkten besteht, bei denen ein Faktor gemeinsam ist. Wenn alle Variationskoeffizienten gleich sind, wird $\varrho_0 = 0{,}5$. Sind also die Variationskoeffizienten gleich, so besteht auch im Fall der zusammenhangslosen Variabeln ein hoher Korrelationskoeffizient, der durch einen Zusammenhang höchstens verdoppelt werden kann.

Für den Fall des Quotienten erhält man aus (3) die von Pearson[1]) aufgestellten Formeln als Spezialfall.

Sind nämlich die Funktionen $f = \frac{X_1}{X_2}$; $g = \frac{X_3}{X_2}$, so wird auf genau demselben Wege

$$\varrho = \frac{v_1\,v_2\,r_{12} - v_1\,v_3\,r_{13} - v_2\,v_3\,r_{23} + v_3^2}{\sqrt{(v_1^2 + v_3^2 - 2\,v_1\,v_3\,r_{13})\;(v_2^2 + v_3^2 - 2\,v_2\,v_3\,r_{23})}} \quad (3b)$$

und

$$\varrho_0 = \frac{v_3^2}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)\;(v_2^2 + v_3^2)}} \quad \ldots (4b).$$

Beispiele.

Für 100 altbayerische Schädel von Ranke (Anthropologie der Bayern, Bd. I, S. 194) er-

[1]) Pearson, Karl, On a Form of Spurios Correlation which may arise when Indices are used in the Measurement of Organs. Proceedings of the Royal Society of London, Vol. LX, S. 489.

$$\varrho = \frac{\mu_1\,\mu_3\,r_{13}\,M_2\,M_4 + \mu_1\,\mu_4\,r_{14}\,M_2\,M_3 + \mu_2\,\mu_3\,r_{23}\,M_1\,M_4 + \mu_2\,\mu_4\,r_{24}\,M_1\,M_3}{\sqrt{(M_2^2\,\mu_1^2 + M_1^2\,\mu_2^2 + 2\,M_1\,M_2\,\mu_1\,\mu_2\,r_{12})\;(M_4^2\,\mu_3^2 + M_3^2\,\mu_4^2 + 2\,\mu_3\,\mu_4\,r_{34}\,M_3\,M_4)}}.$$

gibt sich für die Korrelation zwischen den Verhältnissen $\frac{\text{Breite}}{\text{Länge}}$ und $\frac{\text{Höhe}}{\text{Länge}}$ ein Wert von $\varrho = 0{,}4857$. Setzt man aber die vorhandenen (geringen) Korrelationen zwischen Breite, Länge und Höhe gleich null, d. h. betrachtet man eine vollkommen zufällige Anordnung dieser Schädel, so wäre $\varrho_0 = 0\,4008$. Demnach ist der größte Teil der beobachteten Korrelation nur scheinbar.

Ebenso ergibt sich für 40 männliche Ainoskelette nach den »Mitteilungen der medizinischen Fakultät der Universität Tokio, Bd. I« für die Verhältnisse $\frac{\text{Femus}}{\text{Humerus}}$ und $\frac{\text{Tibia}}{\text{Humerus}}$ eine Korrelation $\varrho = 0{,}564$. Würde man die Knochen aber zufällig anordnen und die starken Korrelationen bei den Knochen desselben Individuums vernachlässigen, so wäre $\varrho_0 = 0{,}456$, d. h. der größte Teil der beobachteten Korrelationen ist wieder nicht organisch. Erst die Differenz zwischen ϱ und ϱ_0 gibt ein Maß für die echte Korrelation.

Das Skelett der Seeigellarven besteht aus vier bilateral symmetrisch angeordneten Kalkstäben. Bezeichnet man die Länge der beiden linken Stäbe mit X_1 und X_2, die rechten Stäbe mit X_3 und X_4, so gewinnt man in dem Korrelationskoeffizienten (3a) zwischen $X_1 \cdot X_2$ und $X_3 \cdot X_4$ ein Maß der apparenten Symmetrie dieser Tiere. Nach den Messungen von Gumbel und Landauer[1]) ergibt sich für den Sphaerechinus genannten Seeigel $\varrho = 0{,}469$, während ϱ_0 stets null ist.

Für die Physiologie ist die Korrelation zwischen der Länge L des Menschen und den Ausdrücken $Q\,L$, $\frac{Q}{L}$, $\frac{Q}{L_2}$ und $\frac{Q}{L_3}$ von Interesse. Dabei bedeutet Q einen fiktiven Körperquerschnitt, definiert durch die Beziehung: $Q\,L$ mal der als konstant angenommenen Dichte gleich dem Körpergewicht. Setzt man $L = X_1$, $Q = X_2$, $r_{Q,L} = r$, so ist $f = M_1$, $g = M_2/M_1^{2n}$ $(n = -1, 1, 2, 3)$. Daher wird nach (3)

$$\varrho\left(L, \frac{Q}{L^n}\right) = \frac{-n\,\mu_1^2 \frac{M_2}{M_1^{n+1}} + \frac{\mu_1 \mu_2 r}{M_1^n}}{\mu_1 \sqrt{\frac{\mu_2^2}{M_1^{2n}} + \frac{\mu_1^2 M_2^2 n^2}{M_1^{2n+2}} - \frac{2n M_1 \mu_1 \mu_2 r}{M_1^{2n+2}}}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit M_1^n/M_2 und führt wieder die v ein, so wird

$$\varrho\left(L, \frac{Q}{L^n}\right) = \frac{v_2 r - n v_1}{\sqrt{v_2^2 + n^2 v_1^2 - 2n v_1 v_2 r}}$$

Das Maß des tatsächlichen Zusammenhanges aber wird

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{v_2 r - n v_1}{\sqrt{v_2^2 + n^2 v_1^2 - 2n v_1 v_2 r}} + \frac{v_1 n}{\sqrt{v_2^2 + n^2 v_1^2}}$$

Speziell ergibt sich nach Kaup[2]) für den Zusammenhang von L und $\frac{Q}{L}$ $\varrho = 0$ wogegen $\varrho_0 = -0{,}28$, so daß $\varrho - \varrho_0 = 0{,}28$.

Heidelberg. E. J. Gumbel. 236

BUCHBESPRECHUNGEN

W. **LUDWIG,** Dr., o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Zweiter Teil. Das rechtwinklige Zweitafelsystem. Kegelschnitte, Durchdringungskurven, Schraubenlinie. Mit 50 Abb. im Text. Verlag von Julius Springer. Berlin 1922. V + 134 S.

Der erste Teil zerfällt in zwei Abschnitte, die betitelt sind: Rechtwinklige Projektion auf mehrere Rißtafeln und die Ellipse als affines Bild des Kreises. Im ersten Abschnitt werden zunächst die grundlegenden Betrachtungen erledigt, worauf zu den Vielfachen, ihren Durchdringungen und Schatten übergegangen wird. Es fällt auf, daß die Nummer VI, Neigungswinkel und Umlegungen einer Ebene, ganz isoliert nach den Vielfachen erscheint und nicht mit den übrigen Betrachtungen über die Ebene (III) vereinigt wurde. Der zweite Abschnitt erledigt die Ellipse, nimmt dazu aber auch den Kreiszylinder und die Kugel.

Der zweite Teil gliedert sich ebenfalls in zwei Abschnitte: »Kegelschnitte« und »Raumkurven«. Die Projektion eines Kreises aus irgend einem Punkte liefert die Kreiskegelfläche, der Umdrehungskegel heißt gerade Kreiskegelfläche. Es werden nun die Schnitte der Kegelfläche abgeleitet. Als Ausgangspunkt dient ein der Polarentheorie angehörender Satz über den Kreis, der dann auf den Schnitt übertragen eine Erzeugung (Büschel-Konstruktion) eines jeden der drei Kegelschnitte liefert. Daraus werden weitere Eigenschaften der Kegelschnitte abgeleitet. Für diesen Teil des Buches kann sich der Berichterstatter nicht erwärmen. Die Entwicklung ist ziemlich umständlich und läßt die Durchsichtigkeit vermissen. Der folgende Abschnitt bringt die Drehungsflächen und dann in eingehender und eigenartiger Weise die Durchdringungen von Zylinder, Kegel und Drehungsflächen. Eine sorgfältige Erörterung der Abwicklung und der Schraubenlinie bildet den Schluß.

Die Darstellung ist ausführlich, eingehend und klar, Strenge in mathematischer Hinsicht wird soweit als möglich erstrebt. An einer einzigen Stelle (beim Krümmungskreis) wird der Begriff des limes eingeführt; auch die neuere Geometrie wird nicht benutzt, obschon wenigstens die Benutzung des unendlich fernen Punktes manche Betrachtungen in einen engeren Zusammenhang brächte. Das Systematisch-

[1]) E. J. Gumbel und Walter Landauer, Statistische Untersuchungen über Korrelation und Symmetrie bei Echinoideen, Archiv für Entwicklungsmechanik, Berlin 1923.

[2]) I. Kaup, Korrelationskoeffizient und funktionelle Abhängigkeit von Körpermaßen, Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie, Jahrgang 34, S. 39 bis 72, München 1923.

Methodische ist betont. Jede Aufgabe unterscheidet genau zwischen »Gegeben« und »Gesucht«. Alle entwickelten Resultate sind sorgsam in Sätze zusammengefaßt. Der Charakter der Vorlesung wird, wie der Verfasser ja auch beabsichtigte, gänzlich verwischt. Die Disposition des Stoffes entbehrt nicht der Eigenart. Auch praktische Bemerkungen sind eingestreut. Die Abbildungen, mit denen allem Anschein nach etwas gespart wurde, lassen nichts zu wünschen übrig. Abbildungen der im Texte erwähnten Maschinenteile, z. B. eines Hahnengehäuses (II, S. 103), würden die Darstellung sehr beleben. Bei der sehr guten Entwicklung über den Umriß einer Fläche (II, S. 266) legt die Betrachtung der Abb. 84 und der Linie l_3' die Bemerkung nahe, daß es auch innerhalb des Umrisses einer Fläche noch begrenzende Umriß-Linien, eben l_3', geben kann, wenn die Fläche sich im Bilde zum Teil selbst verdeckt.

München, Mai 1923.

Karl Doehlemann. 299

NACHRICHTEN

Jahresversammlung in Marburg September 1923. Trotz der äußerst ungünstigen Zeitverhältnisse vermochte die gemeinsame Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Marburg starken Besuch und einen vollen Erfolg aufzuweisen. Es hatten sich über hundert Teilnehmer aus allen Teilen Deutschlands eingefunden, darunter 31 Mitglieder unserer Gesellschaft. An den beiden Vortragstagen, die der Mechanik und angewandten Mathematik gewidmet waren, wurden 18 wissenschaftliche Vorträge, unter z. T. lebhafter Aussprache seitens der Mitglieder gehalten. In der Geschäftssitzung wurden die Satzungen beraten, die in Hinkunft der Tätigkeit der Gesellschaft zugrunde liegen sollen. Im Einzelnen war der Verlauf der Tagung der folgende.

1. Ausschußsitzung am 23. September nachmittags. Vorsitzender Hr. Prandtl. Der Geschäftsführer Hr. v. Mises erstattet Bericht über das abgelaufene Jahr. Der Satzungsentwurf in der Fassung, die aus der schriftlichen Beratung des Ausschusses hervorgegangen ist, wird nochmals erörtert und unverändert zur Vorlage in der Hauptversammlung angenommen. Die Höhe der Mitgliedsbeiträge und die Wahlvorschläge werden besprochen.

2. Wissenschaftliche Sitzung am 24. September vormittags. Vorsitzender Hr. Körner-Prag. Hr. Prandtl zeigt im Anschluß an die Veröffentlichung von Hencky[1]) wie die Henckyschen Sätze über statisch bestimmte Gleichgewichtszustände in plastischen Körpern zahlreicher einfacher Anwendungen fähig sind. U. a. wird der Verlauf der Gleitlinien in einer ebenen Platte, in die ein Stempel eindringt, dargestellt[2]). Hr. v. Mises entwickelt eine allgemeine Theorie der Stabilität elastischer Stabwerke, die ausgeht von zwei Grenzfällen, der reinen Fachwerkknickung und der reinen Rahmenknickung, je nachdem man die einzelnen Stäbe als nur dehnbar bezw. als nur biegsam ansieht. Durch eine etwas veränderte Deutung der Ausgangsgleichungen gewinnt man grundsätzliche Aufklärung hinsichtlich des sogenannten Eindeutigkeitssatzes der Elastizitätstheorie[2]). Hr. Noether behandelt die Randwertaufgabe des Turbulenzproblems, die der Frage entspricht, ob sich einer beliebig vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung in einem Kanal stationäre Schwingungen überlagern lassen. Er zeigt, daß man bei Untersuchung der in Betracht kommenden Eigenwertgleichung sich auf die Wurzeln von geringem absoluten Betrag beschränken darf, da nur diese die notwendige Realitätsbedingung erfüllen könnten, während die größeren gewiß abklingenden Schwingungsvorgängen entsprechen. Hr. Doetsch legt dar, wie man die Differentialgleichung des eindimensionalen Problems der Wärmeleitung in brauchbarer Weise vereinfachen kann durch Anwendung der sogenannten Laplaceschen Transformation.

3. Wissenschaftliche Sitzung am 24. September nachmittags. Vorsitzender Hr. Prandtl. Hr. Nádai gibt eine Theorie der Torsion unter Berücksichtigung der Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze, indem er auf Grundlage der Theorie plastischer Körper die Spannungsverteilung im Fließzustand bestimmt[2]). Hr. Trefftz bespricht im Anschluß daran den besonderen Fall der Torsion eines Winkeleisens mit scharfer innerer Ecke, wobei es gelingt, die Größe des Gebiets bleibender Formänderung für eine gegebene Belastung abzuschätzen. Hr. Grammel entwickelt einen Ansatz, der gestattet, das Torsionsmoment, das nötig ist, um einen geschlossenen elastischen Ring umzustülpen, zu berechnen und die verschiedenen hierbei auftretenden Fälle zu diskutiren[2]). Hr. Schwerin behandelt die Knicksicherheit eines ebenen Bleches, das durch Druckkräfte am Rand in unsymmetrischer Weise belastet wird[2]). Hr. Basch berichtet über eigene Arbeiten, die zum Zwecke haben, bei Durchführung des linearen Ausgleichs von Beobachtungen eine Uebersicht über die Präzision bezw. die Wahrscheinlichkeit verschiedener Lagen der Ausgleichsgeraden zu gewinnen. Hr. Luckey gibt eine kurze Darstellung der nomographischen Grundbegriffe[2]). Hr. Alt bespricht die Aufgabe, die Bewegung einer Ebene aufzusuchen, sobald die Geschwindigkeitspläne dreier ihrer Punkte gegeben sind[2]).

[1]) Diese Zeitschrift, 3, 1923, S. 241 bis 251.

[2]) Der Vortrag wird in dieser Zeitschrift erscheinen.

4. Wissenschaftliche Sitzung am 25. September vormittags. Vorsitzender Hr. v. Mises. Hr. Knoblauch bespricht die theoretischen Grundlagen der unter seiner Leitung im Münchener Institut ausgearbeiteten Dampftabellen und gibt eine Uebersicht über ihre Uebereinstimmung mit den bisherigen Erfahrungen[3]). Hr. Zerkowitz macht im Anschluß an diesen Vortrag eine kurze Mitteilung über die in neuerer Zeit lebhaft gewordenen Bestrebungen, den in Dampfmaschinen und Dampfturbinen wirksamen Dampfdruck erheblich zu steigern. Hr. Pöschl teilt eine spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen idealer Gase mit, die der ebenen Bewegung in einer geradlinig begrenzten Düse unter Berücksichtigung der Reibung entspricht[4]). Hr. Emde entwickelt ein zeichnerisches Verfahren zur Behandlung eindimensionaler Wechselstromprobleme, das auf einer neuartigen Darstellung des sinus und tangens für komplexes Argument beruht. Hr. Rüdenberg führt eine Reihe von Beispielen vor, in denen Schwingungsvorgänge mit nichtlinearem Verlaufe der die Schwingung hervorrufenden Kraft vorliegen. Er zeigt, wie man in einfacher Weise durch zeichnerische Integration die Schwingungsfrequenzen und Schwingungsformen auffinden kann[2]). Hr. Döry bespricht im Anschluß an diesen Vortrag einen besonders interessanten, in der Praxis des elektrischen Bahnbetriebs wichtigen Fall der Schwingungserscheinung, bei der das Spiel in den Gelenken des Kurbeltriebs und die Veränderlichkeit der Elastizitätsverhältnisse ausschlaggebend zu sein scheint[5]). Hr. Pflieger-Haertel macht eine kurze Mitteilung über die Anwendung von Begriffsbildungen aus dem Gedankenkreis der konformen Abbildung auf die Konstruktion der Kreisdiagramme elektrischer Maschinen.

5. Mitgliederversammlung am 25. September nachmittags. Vorsitzender Hr. Prandtl. Hr. v. Mises erstattet den Geschäftsbericht. Danach beträgt der Mitgliederbestand 138, davon 84 in Deutschland, 8 in Deutsch-Oesterreich, 35 in der Tschechoslowakei, 6 in Holland, je 1 in der Schweiz, in Schweden, Spanien, Polen, Amerika. Die Einnahmen der Gesellschaft betrugen bis 15. September rd. 62 Goldmark, die Ausgaben einschließlich des Entwertungsverlustes rd. 17,5 Goldmark, so daß ein Ueberschuß von rd. 44,5 Goldmark verbleibt, von dem der größte Teil in wertbeständiger Form vorhanden ist. Die Versammlung beauftragt den Geschäftsführer, dem Marburger Ortsausschuß für die erfolgreiche Vorbereitung und Organisation der Tagung den Dank der Gesellschaft auszusprechen. Der vom vorläufigen Ausschuß vorgelegte Satzungsentwurf wird von der Versammlung eingehend beraten und mit geringfügigen stilistischen Aenederungen zum Beschluß erhoben. Danach wird die Vereinigung in Hinkunft den einfachen Namen »Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik« führen. Die Aufgabe der Gesellschaft wird in § 2 der Satzungen folgendermaßen festgelegt: Aufgabe der Gesellschaft ist es, die wissenschaftliche Forschung auf allen Teilgebieten der Mechanik, der Mathematik und Physik, die zu den Grundlagen der Ingenieurwissenschaften zählen, zu pflegen und zu fördern, in erster Linie durch Veranstaltung von wissenschaftlichen Versammlungen. Die Gesellschaft strebt die Erfüllung ihrer Aufgabe im Einvernehmen und in enger Gemeinschaft mit dem Verein deutscher Ingenieure an.

Die Mitgliedsbeiträge für das Geschäftsjahr, das am 1. Oktober 1923 beginnt, werden wie folgt festgesetzt: Für Mitglieder in Deutschland 0,25 Goldmark, in Deutsch-Oesterreich 5000 Oe. Kr., in der Tschechoslowakei 5 cK, in den übrigen Ländern 2 Fr., 2 Schilling, $^1/_2$ Dollar, 1 Gulden etc.

Die Versammlung wählt durch Zuruf auf Antrag von Hrn. Knoblauch-München zum Vorsitzenden Hrn. Prandtl, zu seinem Stellvertreter Hrn. Reißner, zum Geschäftsführer Hrn. v. Mises, ferner auf Antrag von Hrn. Prandtl in den wissenschaftlichen Ausschuß die HHr. Emde-Stuttgart (Elektrotechnik), Finsterwalder-München (Mathematik), v. Kármán-Aachen (Mechanik), Knoblauch-München (Tech. Physik), Körner-Prag (Maschinenbau), Trefftz-Dresden (Mechanik).

Der Vorsitzende schließt die Tagung, indem er dem Wunsche nach gedeihlicher Weiterentwicklung der Gesellschaft und nach reger Beteiligung an der nächstjährigen Versammlung Ausdruck gibt.

Mathematischer Reichsverband. Die im Programm der Marburger Versammlung angekündigte Tagung des Reichsverbandes ist ausgefallen. Es hat daher die Aussprache über die Prüfungsordnung der Studienreferendare für reine und angewandte Mathematik, die schon im Vorjahre in Leipzig auf dem Programm stand, damals aber vertagt wurde, wieder nicht stattgefunden. 349

Im Ausschuß für technische Mechanik des Berliner Bezirksvereins deutscher Ingenieure. Montag, d. 3. Dezember, 5 Uhr nachm. spricht Prof. v. Mises über die Knicksicherheit von Gitterträgern (Techn. Hochschule, Hörsaal 158 H).

[3]) O. Knoblauch, E. Raisch, H. Hausen, Tabellen und Diagramme für Wasserdampf berechnet aus der spezifischen Wärme. Berlin und München 1923.

[4]) Math. Ann. 89, 1923, 208 bis 214.

[5]) Vergl. J. Döry, Die Schüttelerscheinungen elektr. Lokomotiven mit Kurbelantrieb. Braunschweig 1923. Vieweg.

(Redaktionsschluß 31. Oktober 1923.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43;
für den Anzeigenteil Fritz Noack, Berlin-Niederschönhausen.
Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin NW 7. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.